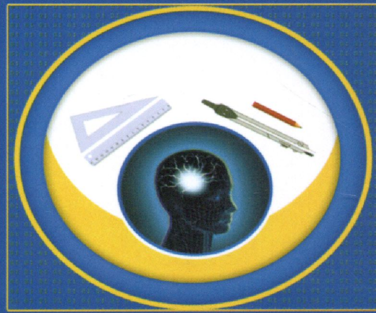
الرياضيات الشاملة

المثلثات - الأسس واللوغاريتمات

صالح رشيد بطارسة



دار أسامة



الرياضيات الشاملة

(المثلثات - الأسس واللوغاريتمات)

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net

الرياضيات الشاملة

* المثلثات
* الأسس واللوغاريثمات
* الرياضيات المالية

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- هاتف: 5658252 – 5658253
- فاكس: 5658254
- العنوان: العبدلي- مقابل البنك العربي

ص. ب: 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2013.

( ) ص.

ر.أ: (2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات المالية

المقدمة

بعد الاتكال على الله، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفِّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدَّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلَّف من البشر.،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذِّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة. . ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

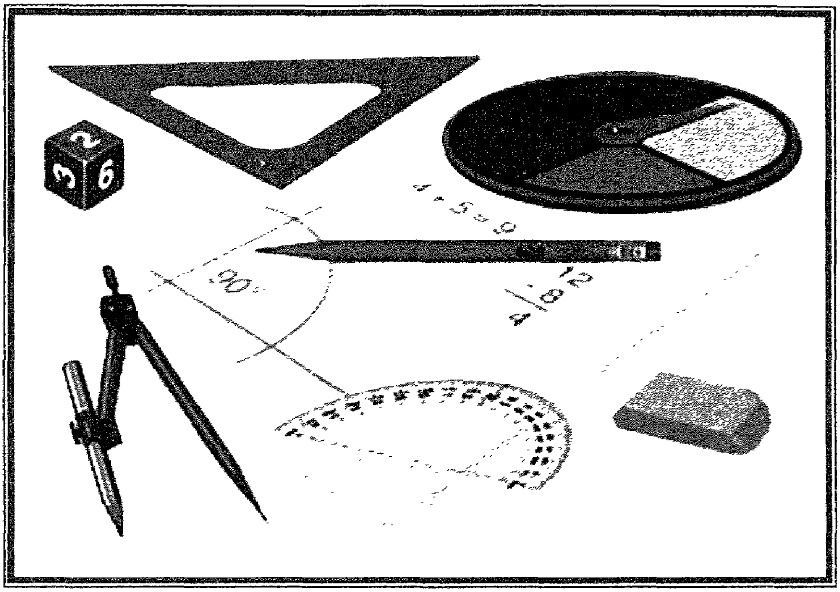
المؤلف

تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

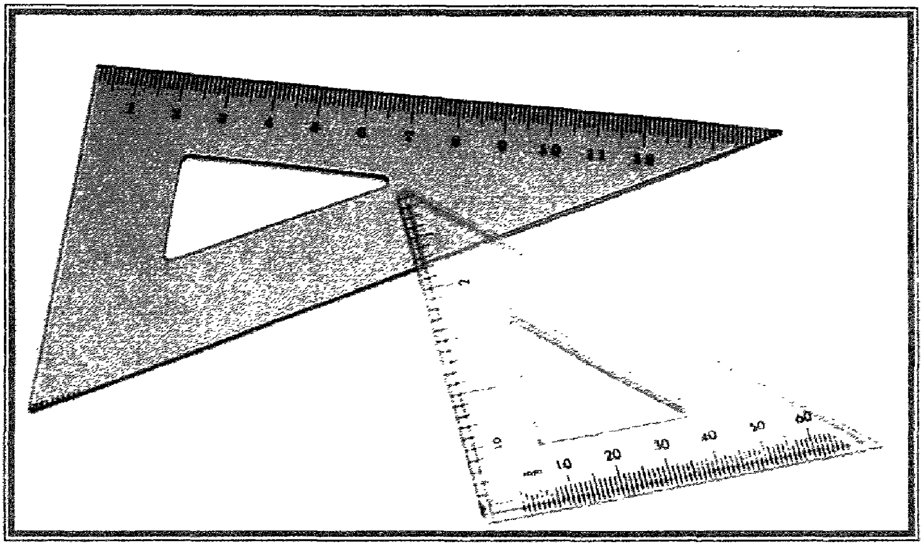
بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف


4 + 5 = 9
90°

المثلثات

Trigonometry


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
10
20
30
40
50
60

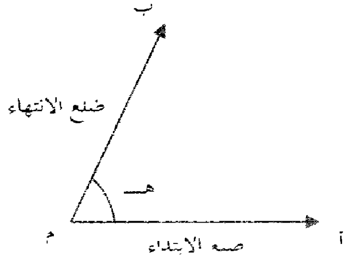
نشأ حساب المثلثات كفرع من فروع الرياضيات في كنف علم الفلك منذ قديم الزمان وبقي ملازماً له لعدة قرون من السنوات إلى أن استقل عنه بفضل علماء العرب الذين طوروه ثم فصلوه عنه، أمثال البتاني (٨٥٨- ٩٢٩)م والبوزجاني (٩٤٠- ٩٨٨)م، فعاد بعدها إلى الرياضيات وأصبح من فروعها البالغة الأهمية والواسعة الانتشار، يبحث حساب المثلثات في الزاوية وقياسها وأنواعها، والمثلث والعلاقات بين أضلاعه وزواياه والتي تتمثل بعدد من القواعد والقوانين كما ويستخدم في كثير من العلوم كالهندسة والفيزياء وعلوم الأرض والفضاء (الفلك)، وله كثير من التطبيقات كإيجاد المساحات وقياس الارتفاعات والانخفاضات والمسافات ثم اتسعت مجالات استخدامه وانتشرت تطبيقاته حتى شملت العديد من الظواهر الفيزيائية مثل الأمواج الصوتية والأشعة الضوئية ومدارات الكواكب والجسيمات الذرية.

سنتناول في هذا المؤلف حساب المثلثات بالتفصيل وتطبيقاته العديدة في الرياضيات بالتأكيد: ولنبدأ أولاً:

(١١- ١) الزاوية Angle وقياسها:

تعتبر الزاوية لبنة البناء في حساب المثلثات والاقترانات المثلثية وقوانينها على السواء.

وتعرّف الزاوية بأنها: الانفراج الحاصل بين شعاعين مثل م أ→ ، م ب→ لها نفس نقطة البداية مثل «م» والتي تسمى رأس الزاوية كما في الشكل

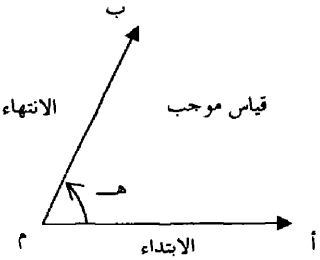


حيث الشعاع م أ→ يسمى ضلع الابتداء.

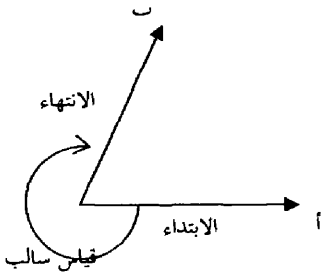
والشعاع م ب→ يسمى ضلع الانتهاء.

ويرمز للزاوية بأحد الرموز: ∢م، ∢ أ م ب، أما قياس الزاوية فهو مقدار دوران ضلع الابتداء م أ→ حتى يأخذ وضع ضلع الانتهاء م ب→، ولقياس الزاوية اتجاهان هما:

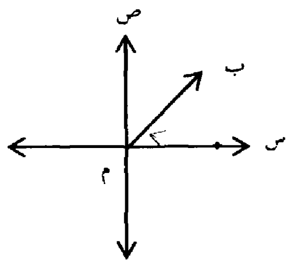
الأول: الاتجـاه الموجـب، عنـدما يكـون دوران ضلع الابتداء بعكس اتجاه عقارب الساعة كما في الشكل.



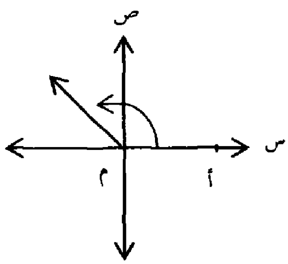
والثاني: الاتجاه السالب، عنـدما يكـون دوران ضلع الابتداء باتجاه دوران عقارب السـاعة كما في الشكل.



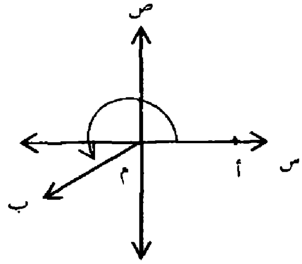
هـذا وتكـون الزاويـة ∢أ م ب بوضـعها القياسي في المستوى الديكارتي إذا كان رأسها نقطة الأصل وضلع ابتدائها منطبقاً على الجـزء الموجـب لمحـور السينات وضـلع انتهائهـا تائهـاً في الأربـاع الأربعـة للمـستوى أو منطبقـاً علـى أحـد المحورين الإحداثيين كما في الإشـكال:



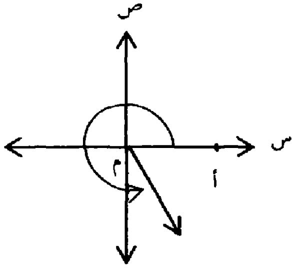
(ضلع الانتهاء في الربع الأول)



(ضلع الانتهاء في الربع الثاني)



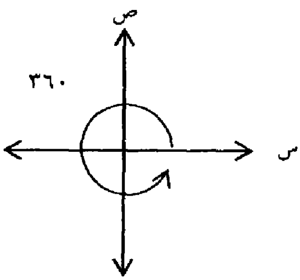
(ضلع الانتهاء في الربع الثالث)



(ضلع الانتهاء في الربع الرابع)

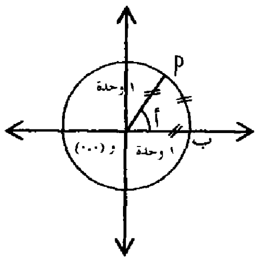
ولقياس الزاوية هناك تقديران هما:

الأول: التقدير الستيني، وحدة القياس فيه هي الدرجة Degree ويرمز لها بالرمز "°"، والدرجة الواحدة ١° هي قياس الزاوية يوضعها القياس والمساوي لـ $\frac{١}{٣٦٠}$ من الدورة الكاملة، ومن هنا فالدورة الكاملة تكافئ ٣٦٠° كما في الشكل



وهناك أجزاء للدرجة هي الدقائق وأجزاء للدقيقة هي الثواني.... إلخ (لا حاجة لنا بها في هذا المؤلف).

الثاني: التقدير الدائري ووحدة القياس فيه هو الراديان Radian ويرمز له بالرمز "ء" والراديان الواحد ١ء هو قياس الزاوية بوضعها القياسي في المستوى الديكارتي باستخدام دائرة الوحدة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة واحدة وطول قوسها المقابل لها وحدة واحدة أيضاً كما في الشكل



أي أن طول القوس = $\overset{\frown}{أب}$ طول نق = ١ وحدة

فالعلاقة بين التقديرين الستيني بالدرجات والدائري بالراديان هي:

بما أن قياس الزاوية التي تمثل دورة كاملة = ٣٦٠°

ومحيط دائرة الوحدة الذي يقالبها = ٢π حيث

(محيط الدائرة = ٢نقπ ودائرة الوحدة نصف قطرها ١وحدة).

أي أن: ٣٦٠° $\xrightarrow{\text{تكافئ}}$ ٢πء

من هذه العلاقة ينتج:

أولاً: ١° = ٠.٠١٧٥ راديان

ثانياً: ١ء = ٥٧.٣ درجة.

⇦ مثال: زاوية قياسها ١٥٠° ما مقياسها بالرديان؟

٣٦٠° ⟵ ٢πء
١٥٠° ⟵ سء

وكون التناسب طردي فبالضرب التبادلي

$$\frac{٣٦٠^\circ \times س}{٣٦٠^\circ} = \frac{١٥٠^\circ \times ٢\pi^ء}{٣٦٠^\circ}$$

$$\therefore س = \frac{٥}{٦}\pi^ء$$

⇦ مثال: زاوية قياسها $\frac{٢}{٣}\pi^ء$ ما قياسها بالدرجات؟

$٣٦٠^\circ \longrightarrow ٢\pi^ء$

$١٥٠^\circ \longrightarrow س^ء$

وبما أن التناسب طردي فالضرب التبادلي

$$= \frac{٢\pi \times س}{٢\pi} = \frac{\frac{٢}{٣}\pi \times ٣٦٠^\circ}{٢\pi} = \frac{٢\pi \times ٣٦٠^\circ}{٢\pi} \quad ١٢٠^\circ$$

⇦ مثال: زاوية قياسها $٢^ء$ ما قياسها بالدرجات؟

بما أن $٣٦٠^\circ \longrightarrow ٢\pi^ء$

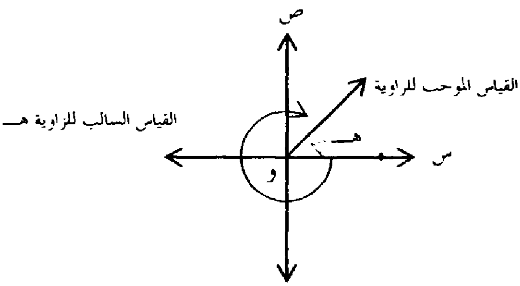
وكون $\pi = ٣.١٤$ أو $\frac{٢٢}{٧}$.

فإن $٣٦٠^\circ \longrightarrow ٢(٣.١٤) = ٦.١٨^ء$

$س^\circ \longrightarrow ٣^ء$

وبالضرب التبادلي: $\frac{س \times ٦.١٨}{٦.١٨} = \frac{٣ \times ٣٦٠}{٦.١٨}$

$$\therefore س = \frac{٢٠٠ \times ٣٦٠}{١٨ \times ٦} = \frac{١٨٠٠٠}{١٠٣} = ١٧٤^\circ$$ تقريباً.



والآن سنجيب على هذا السؤال.. ما العلاقة بين القياس الموجب والقياس السالب للزاوية؟ الجواب من الشكل المجاور لكل زاوية مثل هـ قياسان موجب وسالب كما أسلفنا وتقديران بالدرجات والراديان كما أسلفنا أيضاً.

ومن الملاحظ (أنظر الشكل) إن قيمة مجموع القياسين الموجب والسالب للزاوية هـ هي ٣٦٠° أو ٢πᵈ كون القياسين يشكلان دورة كاملة.

فإذا كان قياس الزاوية هـ الموجب هو ق١ بالدرجات والراديان

و قياس الزاوية هـ السالب هو ق٢ بالدرجات والراديان

وبما أن |القياس الموجب| + |القياس السالب| = دورة كاملة (باستخدام القيمة المطلقة كما نرى)

فإن |ق١| + |ق٢| = ٣٦٠° (الدورة الكاملة من الدرجات)

أو |ق١| + |ق٢| = ٢π ᵈ (محيط دائرة الوحدة)

والتفسيران |القياس الموجب| + |القياس السالب| = ٣٦٠° أو ٢π ᵈ

وهذه العلاقة تتيح لنا معرفة أحد القياسين إذا عُرف الآخر كما يلي:

⇦ مثال: إذا كان قياس الزاوية أم جـ = ١٥٠° فما قياسها السالب؟

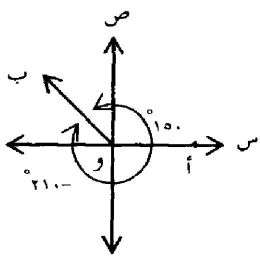
وبما أن |ق١| + |ق٢| = ٣٦٠° (بالدرجات)

فإن |١٥٠| + |السالب| = ٣٦٠°

أي أن ١٥٠° + القياس السالب = ٣٦٠°

∴ القياس السالب = ٣٦٠ - ١٥٠= ٢١٠°

أي أن قياس الزاوية أ م جـ = - ٢١٠° كونه سالب.



فالقياسان ١٥٠° ، - ٢١٠° هما قياسان لزاوية واحدة أحدهما باتجاه ضد عقارب الساعة والثاني معه كما في الشكل.

⇦ مثال: إذا كان قياس الزاوية أ م جـ = $-\frac{5}{6}\pi$ فما قياسها الموجب.

بما أن |ق١| + |ق٢| = 2π د

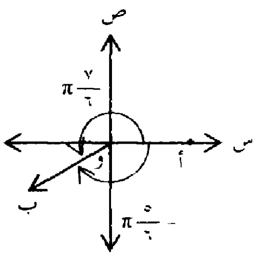
فإن |الموجب| + |$-\frac{5}{6}\pi$| = 2π د

أي أن القياس الموجب + $\frac{5}{6}\pi$ د = 2π د

∴ أي أن القياس الموجب = $\frac{2}{1}\pi$ د - $\frac{5}{6}\pi$ = $\frac{12\pi - 5\pi}{6}$ = $\frac{7}{6}\pi$

أي أن قياس الزاوية أ م جـ = $\frac{7}{6}\pi$ كونه موجب

فالقياسان - $\frac{5}{6}\pi$، $\frac{7}{6}\pi$ قياسان لزاوية واحدة وبتقدير واحد لكن أحدهما ضد عقارب الساعة والآخر معه كما في الشكل.



بما أن 360° ⟵ 2π د

فإن -210° ⟵ س د

وبالضرب التبادلي

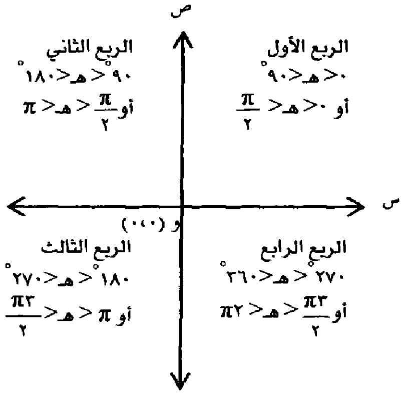
$$\frac{360^\circ \times س}{360^\circ} = \frac{360^\circ \times س}{360^\circ}$$

∴ س= $-\frac{7}{6}\pi$

فالقياس السابق بالدرجات يقابله قياس سالب بالراديان كونها قياس لزاوية واحدة ولكن بتقديرين (الستيني والدائري) فلا تغيير بالإشارة.

والعكس صواب، أي أن الإشارة تبقى بعد التحويل من الدرجات إلى الراديان والعكس.

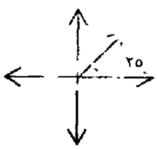
نعود لنذكّر مرة أخرى بالمستوى الديكارتي وأرباعه الأربعة لتوضيح قياس الزاوية الواقعة في كل ربع منه بالدرجات أو الراديان كما في الشكل.



فإذا كان قياس الزاوية هـ وبوضعها القياسي بالدرجات أو الراديان فإن قيمتها الأقل من دورة كاملة محصورة في الأرباع الأربعة كما في الشكل وإذا كانت قيمتها أكثر من دورة فإننا نطرح منها دورات قيمتها ٣٦٠°، ٣٦٠°×٢، ٣٦٠°×٣، .....، ٣٦٠°× م حيث م عدد صحيح.

أو دورات منها ٢π، ٢π×٢، ٢π×٣، ..... ٢π × م حيث م عدد صحيح.

⇦ مثال: حدِّد في أي ربع أو على أي محور يقع ضلع الانتهاء د ← بالراديان في الوضع القياسي لكل زاوية من الزوايا التي قياسها: ٢٥°، ١٥٠°، ٢٧٠°، $\frac{٢}{٣}$ πد، ٧٠٠°.



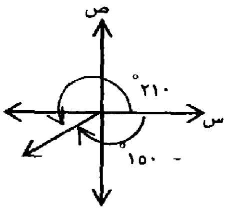
(i) ∢ هـ = ٢٥° يقع في الربع الأول حيث ٠ < هـ ٩٠°

(ii) نحول القياس السالب - ١٥٠° إلى قياس موجب (أفضل)

| ق١ | + | -١٥٠° | = ٣٦٠° |

∴ | ق١ | + | ١٥٠° | = ٣٦٠°

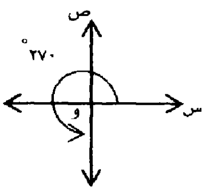
∴ | ق١ | = ٣٦٠° - ١٥٠° = ٢١٠°



وبما أن $ق_1$ موجب: قياس موجب: ٢١٠° لنفس الزاوية

وبما أن ١٨٠° < ٢١٠° < ٢٧٠°

∴ يقع في الربع الثالث كما في الشكل

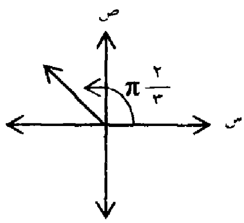


(iii) ∢ هـ= ٢٧٠° يقع محور الصادات السالب كما في الشكل

(iv) ∢ هـ = $\frac{٢}{٣}\pi$

بما أن $\frac{\pi}{٢} < \frac{٢}{٣}\pi$

∴ يقع في الربع الثاني



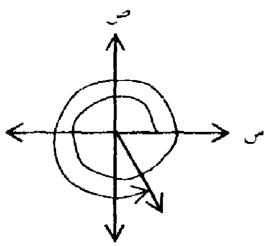
(v) ∢ هـ = ٧٠٠°

بما أن قياس هـ أكبر من دورة (٣٦٠°) فإننا نطرح دورات حتى يصبح قياسها أقل من ٣٦٠° هكذا.

٧٠٠° - ٣٦٠° = ٣٤٠°

بما أن ٢٧٠° < ٣٤٠° < ٣٦٠°

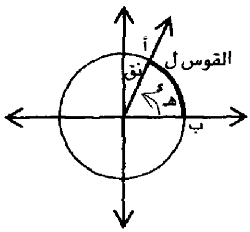
∴ يقع في الربع الرابع كما في الشكل



∢ هـ = ٧٠٠° = ٣٦٠° + ٣٤٠°
وكان ∢ هـ = ٣٤٠° فقط.

ويجب التأكيد على أن التقدير الدائري لقياس الزاوية بالراديان أكثر أهمية من قياسها بالدرجات وأكثر منه انتشاراً في الرياضيات، لذا سنركز عليه كثيراً وفي هذا السياق سنجد طول القوس Arch Length المقابل للزاوية هـ بأي دائرة مهما كان نصف قطرها هكذا:

فإذا كان قياس الزاوية هـ بالراديان وكان نصف قطر الدائرة نق (الدائرة التي مركزها رأس الزاوية) وطول القوس المقابل للزاوية هـ هو ل كما في الشكل.



فإن:

طول القوس = نصف قطر الدائرة × قياس الزاوية بالراديان

وبالرموز:

ل = نق × هـ

⇦ مثال: ما طول القوس المقابل للزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٣}$ راديان في دائرة نصف قطرها ١٢سم.

بم أن ل = نق × هـ

فإن ل = ١٢ × $\frac{\pi}{٣}$ = ٤πسم = ٤ (٣,١٤) = ١٢,٥٦سم.

⇦ مثال: ما طول القوس المقابل التي قياسها ١٢٠° في دائرة نصف قطرها ١٥سم.

أولاً: نحول ١٢٠° إلى الردايان هكذا

٣٦٠° ⟵ ٢π

١٢٠° ⟵ س وبالضرب التبادلي

∴ س = $\frac{٢\pi \times ١٢٠}{٣٦٠}$ = $\frac{٢}{٣}\pi$

أي أن: ل = نق × هـ

= ١٥ × $\frac{٢}{٣}\pi$

= ١٥ × $\frac{٢}{٣}$ × ٣,١٤

= ٣١,٤ سم تقريباً.

⇦ مثال: أوجد قياس الزاوية هـ بالراديان والتي تقابل قوس طوله ٢٠سم في دائرة نصف قطرها ١٥سم حيث ٠ ≥ هـ ٢π

بما أن ل = نق × هـ

∴ ٢٠ = ١٥ × هـ ْ

∴هـ ْ = $\frac{٢٠}{١٥}$ = $\frac{٤}{٣}$ راديان

وبما أن ٣٦٠° ⟵ ٢π = ٢ (٣,١٤) = ٦,٢٨ راديان

فإن س ⟵ $\frac{٤}{٣}$ راديان

وبالضرب التبادلي: س = $\frac{٧٠٠° \times \frac{٤}{٣}}{٦,٢٨}$ = $\frac{٣٦٠ \times ٤}{٦,٢٨ \times ٣}$ = ٧٦° لأقرب درجة.

⇦ مثال: أوجد نصف قطر الدائرة التي فيها طول القوس يساوي ٢٠سم ويقابل زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ راديان.

بما أن ل = نق × هـ ْ

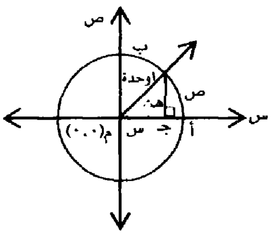
∴ ٢٠ = نق × $\frac{\pi}{٤}$

ومنه نق = $\frac{٢٠}{\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{٢٠\times٤}{\pi}$ = $\frac{٨٠}{٣,١٤}$ = ٢٥,٤٥سم

(١١- ٢) الاقترانات الدائرية (المثلثية) Trigonometric Functions

ترتبط هذه الاقترانات بدائرة الوحدة، ودائرة الوحدة كما مر سابقاً هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل م (٠،٠) ونصف قطرها وحدة واحدة ومعادلتها س٢ + ص٢ = ١

كما في الشكل إن ضلع الانتهاء في الزاوية ∢أ م ب يقطع محيط دائرة الوحدة في النقطة ب (س،ص).



يمكن من الشكل تعريف الاقترانات التالية:

س = جتا هـ أي أن ق(س) = جتا هـ ويسمى اقتران جيب التمام Cosine Function.

ص = جا هـ أي أن ق(س) = جا هـ ويُسمى اقتران الجيب Sine Function.

وبما أن في دائرة الوحدة أكبر قيمة (س) الإحداثي السيني = ١

وأقل قيمة له = - ١

وكذلك أكبر قيمة للإحداثي الصادي = ١

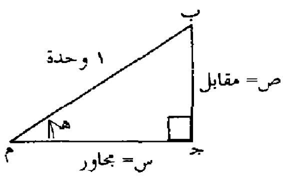
وأقل قيمة له = - ١

فإن - ١ ≤ جتا هـ ≤ ١ أي أن جتا هـ ∋ [- ١، ١]

وكذلك - ١ ≤ جا هـ ≤ ١ أي أن جا هـ ∋ [- ١، ١]

هـذان الاقترانـان {ق(س)= جتـاس} وكـذلك {ق (س) = جـاس} يُـسميان الاقترانات الدائرية الأساسية.

وإذا ما انتزعنا المثلث ب جـ م القائم الزاوية هكذا



فإن ص تسمى مقابل للزاوية هـ

وكذلك س تسمى مجاور للزاوية هـ

وهذا يذكرنا بأن:

$$\text{جتاهـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{1} = \text{س}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ص}}{1} = \text{س}$$

فـلا خـلاف بـين الاقترانـات الدائريـة ق(س)= جتـاس، ق(س) جـاس والنـسب المثلثية إلا التسمية فقط.

وبما أن معادلة دائرة الوحدة هي $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

فإن $\text{جتا}^2\text{هـ} + \text{جا}^2\text{هـ} = 1$

وقبل أن نسترسل بالنقاش والتوضيح علينـا أن نُعـرِّف اقترانـات دائريـة أخـرى اعتمـاداً علـى الاقترانـات الأسـاسـية تـسمى الاقترانـات الثانويـة وجميعهـا تُـشتق مـن مسقطي الزوج المرتب (جتاهـ، جاهـ) كما يلي:

اقتران الظل Tange Function وقاعدته ق(هـ)= ظاهـ

ويعرف $\text{ظاهـ} = \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ ، لكل جتاهـ ≠ صفر

اقتران ظل التمام Co Tange Function وقاعدته ق(هـ)= ظتاهـ

ويعرف ظتاهـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$ ، جاهـ ≠ صفر

اقتران القاطع Secant Function وقاعدته ق(هـ)= قاهـ

ويعرف قاهـ = $\frac{1}{\text{جتاهـ}}$ ، لكل جتاهـ ≠ صفر

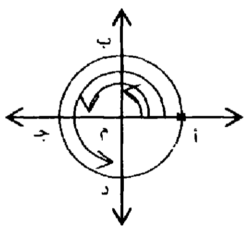
اقتران قاطع التمام Cosecant Function وقاعدته ق(هـ)= قتاهـ

ويعرف قتاهـ = $\frac{1}{\text{جاهـ}}$ ، جاهـ ≠ صفر

الآن سنقوم بجولة علمية ونقاشية على الأرباع، والمحورين الإحداثيين كما يلي:

أولاً: الزوايا المحورية:

والزاوية المحورية بوضعها القياسي يكون ضلع ابتدائها منطبقاً على محور السينات الموجب وضلع انتهائها منطبقاً على أي جزء من المحورين (محور السينات الموجب أو محور السينات السالب أو محور الصادات الموجب أو محور الصادات السالب) كما في الشكل:



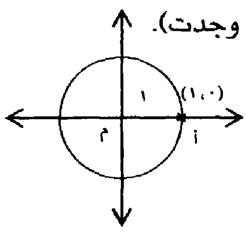
∢ أ م أ وقياسها صفر°

∢ أ م ب وقياسها ٩٠°

∢ أ م جـ وقياسها ١٨٠°

∢ أ م د وقياسها ٢٧٠°

النسب المثلثية أو الاقترانات الدائرية للزاوية صفر (إن وجدت).



∢ أ م أ بوضعهاها القياسي

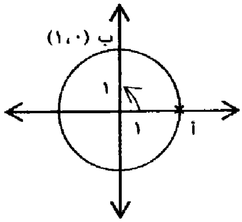
ودائرة الوحدة كما في الشكل

جتاصفر = ١ (الإحداثي السيني)

جاصفر = ٠ (الإحداثي الصادي)

ظاصفر = $\frac{\text{جاصفر}}{\text{جتاصفر}}$ = $\frac{\text{صفر}}{1}$ = صفر

الاقترانات الدائرية للزاوية ٩٠° = $\frac{\pi^{ء}}{٢}$

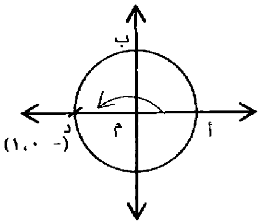


جتا $\frac{\pi}{٢}$ = ٠ (الإحداثي السيني)

جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ (الإحداثي الصادي)

ظا $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{\text{جا } \frac{\pi}{٢}}{\text{جتا } \frac{\pi}{٢}}$ = $\frac{١}{٠}$ = غير معرفة

الاقترانات الدائرية للزاوية ١٨٠° = $\pi^{ء}$

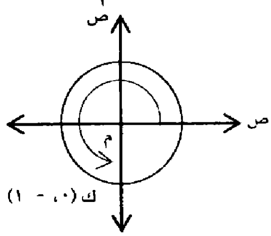


جتاπ = - ١ (الإحداثي السيني)

جاπ = ٠ (الإحداثي الصادي)

ظاπ $\frac{\text{جا}\pi}{\text{جتا}\pi}$ = $\frac{\text{صفر}}{١}$ = صفر

الاقترانات الدائرية للزاوية ٢٧٠° = $\frac{٣}{٢}\pi^{ء}$



جتا $\frac{٣\pi}{٢}$ = صفر (الإحداثي السيني)

جا $\frac{٣\pi}{٢}$ = - ١ (الإحداثي الصادي)

ظا $\frac{٣\pi}{٢}$ = $\frac{\text{جا } \frac{٣\pi}{٢}}{\text{جتا } \frac{٣\pi}{٢}}$ = $\frac{١}{\text{صفر}}$ غير معرفة

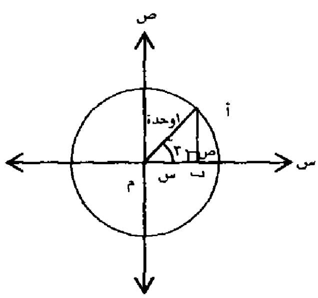
ونلخص بإيجاز الاقترانات الدائرية أو النسب المثلثية للزوايا المحورية في هذا الجدول:

	النسبة \ الزاوية(هـ)	صفر	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	
	جتا هـ	١	٠	١ -	٠	
	جا هـ	٠	١	٠	١ -	
	ظا هـ	٠	غير معرف	٠	غير معرف	
ظاهـ ≠ صفر،	ظتاهـ	غير معرف	٠	غير معرف	٠	كون ظتاهـ= $\frac{١}{ظاهـ}$
جتاهـ ≠ صفر،	قاهـ	١	غير معرف	١ -	غير معرف	كون قاهـ= $\frac{١}{جتاهـ}$
جاهـ ≠ صفر،	قتاهـ	غير معرف	١	عير معرف	١ -	كون قتاهـ= $\frac{١}{جاهـ}$

ثانياً: الزوايا الخاصة (المشهورة) والمرتبطة بها أيضاً من الأرباع الأخرى.

تسمى الزوايا التي قياسها $\frac{\pi}{٦}$، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ بالزوايا المشهورة كونها تستخدم بكثرة في الرياضيات والعلوم الأخرى كالفيزياء مثلاً.

وللسهولة سوف نجد الاقترانات الدائرية لكل زاوية منها واستعانة بدائرة الوحدة هكذا الاقترانات الدائرية للزاوية $\frac{\pi}{٤}$ = ٣٠° كما في الشكل



«الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم الزاوية أ ب م يساوي نصف الوتر»

$\therefore$ ص = $\frac{١}{٢}$

لكن س^{٢} = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ = ١

س^{٢} = ١ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

س= $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وكون الزاوية في الربع الأول فجميع اقتراناتها الدائرية موجبة.

∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ⟵ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

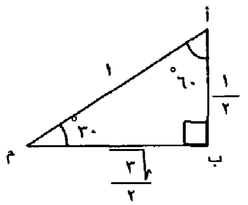
ص= $\frac{١}{٢}$ ⟵ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

ظل ٣٠° = $\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

وإذا نزعنا المثلث أ ب م من الشكل ووضعناه لوحده هكذا.

فإن ∢ أ= ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

ومنه:

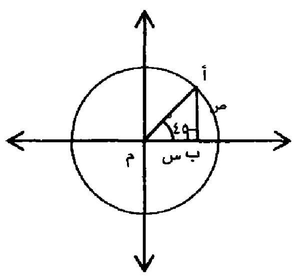


جتا ٦٠° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}}{١}$ = $\frac{١}{٢}$

جا ٦٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{١}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٦٠° = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$

وأما الاقترانات الدائرية للزاوية ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$ فمن الشكل المثلث أ ب م قائم الزاوية متساوي الساقين.



∴ ص = س = ك مثلاً

لكن س^{٢} + ص^{٢} = ١ معادلة دائرة البعد

∴ ك^{٢} + ك^{٢} = ١

ك٢ = $\frac{١}{٢}$

ك = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ص = جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا٤٥° = $\frac{\frac{١}{\sqrt{٢}}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$ = ١

نلخص بإيجاز الاقترانات الدائرية للزوايا الخاصة كما يلي:

الزاوية(هـ) / الاقتران الدائري	(٣٠°)	(٤٥°)	(٦٠°)	
	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	
جتاهـ	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	
جاهـ	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	
ظاهـ	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\frac{\sqrt{٣}}{١}$	
ظتاهـ	$\frac{\sqrt{٣}}{١}$	١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	كزن ظتاهـ = $\frac{١}{ظاهـ}$ ، ظاهـ ≠ صفر
قاهـ	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٢}$	٢	كزن قاهـ = $\frac{١}{جتاهـ}$ ، جتاهـ ≠ صفر
قتاهـ	٢	$\sqrt{٢}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	كزن قتاهـ = $\frac{١}{جاهـ}$ ، جاهـ ≠ صفر

هذا وترتبط بكل زاوية من هذه الزوايا المشهورة ثلاث زوايا أخرى تقع في الأرباع الباقية ولإيجاد اقتراناتها الدائرية نقوم بالمناقشة التالية:

١. إشارات (+، -) الاقترانات الدائرية وفي الأرباع الأربعة تظهر كما يلي:

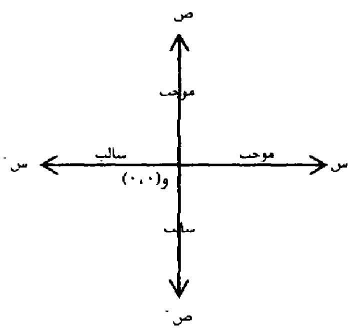
من المعروف في الهندسة التحليلية أن إشارات المحورين كما يلي:

وس ـــــ موجب

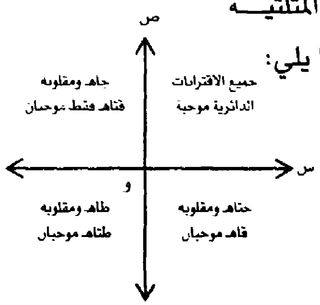
وص ـــــ موجب

وس⁻ ـــــ سالب

وص⁻ ـــــ سالب



ولذلك فإشارات النسب المثلثية (الاقترانات الدائرية) للزوايا تظهر كما يلي:

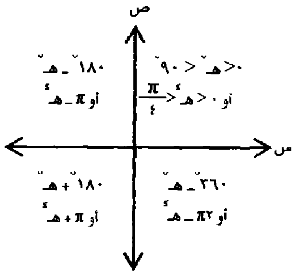


نلخص الإشارات كما يلي: كل، جا هـ، ظاهـ، جتاهـ موجبة في الأرباع

وعلى الترتيب: ⇩ ⇩ ⇩ ⇩

الأول الثاني الثالث الرابع

ولإيجاد أي نسبة مثلثية أو اقتران مثلثي نضع الزاوية المراد إيجاد اقتراناتها الدائرية بصورة من الصور التالية حسب الأرباع علماً بأن ٠< هـ $\frac{\pi}{٢}$> أي زاوية حادة.



كما في الأمثلة التالية:

⇦ مثال: أوجد جا١٥٠°

بما أن ٠ < ١٥٠° < ١٨٠°

فإنها تقع في الربع الثاني:

∴ جا١٥٠° = جا(١٨٠° ـ ٣٠°)= جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$ كون جاهـ بالربع الثاني موجب

⇦ مثال: أوجد جتا٢١٠°

بما أن ١٨٠° < ٢١٠° < ٢٧٠° فإنها تقع في الربع الثالث

∴ جتا٢١٠° = جتا(١٨٠° + ٣٠°)= ـ جتا٣٠° = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ كون جتاهـ بالربع الثالث سالب.

⇦ مثال: أوجد ظا٣٠٠°

بما أن ٣٠٠° تقع في الربع الرابع

∴ ظا٣٠٠° = ظا(٣٦٠° ـ ٦٠°)= ـ ظا٦٠° = ـ $\sqrt{٣}$ كون ظاهـ بالربع الرابع سالب.

وهناك زوايا أخرى لا ترتبط بالزوايا المشهورة ولكنها ترتبط بالزاوية هـ المجاورة حيث ٠< هـ < $\frac{\pi}{٢}$ واستعانة بالجداول أو الآلة الحاسبة.

⇦ مثال: أوجد جتا١٦٠°

وحيث أن ١٦٠° تقع في الربع الثاني

فإن جتا١٦٠° = جتا(١٨٠° ـ ٢٠°) حيث θ = ١٨٠° ـ ١٦٠°

= ـ جتا٢٠° = ـ ٠.٩٣ من الآلة الحاسبة.

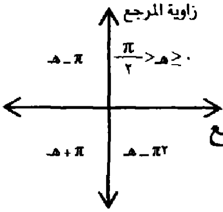
⇦ مثال: أوجد جا ٤٠٠°

وحيث أن ٤٠٠° أكبر من دورة فإننا نطرح منها ٣٦٠° هكذا

٤٠٠° = ٤٠٠° ـ ٣٦٠° = ٤٠°

∴ جا٤٠٠° = جا٤٠° = ٠٫٦٤ من الآلة الحاسبة.

⇦ مثال: دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد ظا $\frac{\pi ٥}{٤}$



بما أن ظا $\frac{\pi ٥}{٤}$ تقع بالربع الثالث

فإن ظا($\frac{\pi ٥}{٤}$) = ظا(π + $\frac{١}{٤}$ π) حيث $\frac{\pi}{٤}$ زاوية المرجع

= ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ١ ($\frac{\pi}{٤}$ من الزوايا الخاصة المشهورة)

⇦ مثال: دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قتا $\frac{\pi ٢}{٣}$

بما أن $\frac{٢}{٣}$ π تقع في الربع الثاني

فإن قتا ($\frac{٢}{٣}$ π) = قتا (π ـ $\frac{\pi}{٣}$) = قتا $\frac{\pi}{٣}$

= $\frac{١}{جا \frac{\pi}{٣}}$ = $\frac{١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ($\frac{\pi}{٣}$ من الزوايا الخاصة أو المشهورة)

⇦ مثال: أوجد جا $\frac{١١}{٦}$ π

بما أن $\frac{١١}{٦}$ π تقع في الربع الرابع

فإن جا ($\frac{١١}{٦}$ π) = جا(٢π ـ $\frac{\pi}{٦}$) = ـ جا $\frac{\pi}{٦}$

= ـ $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\pi}{٦}$ من الزوايا الخاصة أو المشهورة)

⇦ مثال: باستخدام الآلة الحاسبة أوجد ظا٢٣٠°

بما أن ٢٣٠° تقع في الربع الثالث

فإن ظا (٢٣٠°) = ظا (١٨٠° + ٥٠°) = ظا٥٠°

= ١٫١٩ من الآلة الحاسبة (كون ٥٠° ليست من الزوايا الخاصة)

وإذا كان قياس الزاوية غير معروف فإننا نلجأ إلى معطيات أخرى كما يلي:

⇦ مثال: إذا كان جاهـ = $\frac{١}{٣}$ وكانت الزاوية ∢هـ تقع في الربع الأول أوجد

جميع الاقترانات الدائرية لها.

نستعين بمعادلة الدائرة $س^2 + ص^2 = 1 \xleftrightarrow{\text{تناظر}} جتا^2هـ + جا هـ^2 = 1$

أي أن $جتا^2هـ + (\frac{1}{3})^2 = 1$

$جتا^2هـ + \frac{1}{9} = 1 \longleftarrow جتا^2هـ = 1 - \frac{1}{9} \longleftarrow جتا^2هـ = \frac{8}{9}$

أي أن $جتا هـ = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ كون الزاوية تقع في الربع الأول وجميع اقتراناتها الدائرية موجبة.

ومنه $ظا هـ = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$ظتا هـ = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$ظتا هـ = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$ظتا هـ = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

ثالثاً: الاقترانات الدائرية للزوايا السالبة

بما أن للزوايا قياسان هما القياس الموجب والقياس السالب، فإننا نقول أن الزاوية موجبة إذا كان قياسها الأول (الرئيسي) موجب مثل ∢ أ م جـ = ٧٠° موجب

ومع ذلك فإن لها قياس سالب هو ٣٦٠° ـ ٧٠° = ٢٩٠° سالب

أي ∢ أ م جـ = - ٢٩٠°

أي للزاوية أ م جـ قياس موجب هو الرئيسي وقياس سالب هو الآخر.

وبأسلوب مماثل يمكن أن نقول للزاوية التي قياسها الرئيسي سالب بأنها زاوية سالبة مثل

ـ٣٠° ، ـ٤٥° ،ـ٦٠° ، وبشكل عام ـ هـ

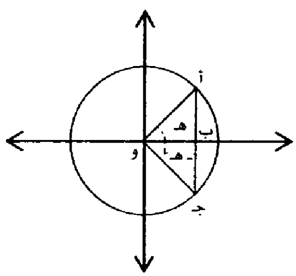
والآن سنناقش كيفية إيجاد

جا ـ هـ، جتا ـ هـ، ظا ـ هـ، قتا ـ هـ، قا ـ هـ، ظتا ـ هـ

سنعتمد على القواعد التالية:

i. | جتا(ـ هـ) = جتاهـ | و كذلك قا(ـ هـ) = قاهـ كون قا(ـ هـ) = $\frac{١}{جتا(ـ هـ)}$

ونحصر الرسم بالربع الأول للسهولة كما في الشكل



∢ أ و ب = هـ زاوية موجبة

∢ ب و جـ = ـ هـ زاوية سالبة

جتاهـ = ب و الإحداثي السيني

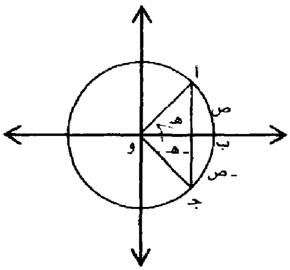
جتاـ هـ = ب و الإحداثي السيني نفسه

∴ جتا هـ = جتا ـ هـ والعكس صواب

لذلك جتا (ـ٣٠°) = جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وكذلك قا (ـ٣٠°) = قا٣٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ii. [جا(ـ هـ) = ـ جاهـ] وكذلك قتا(ـ هـ) = ـ قتاهـ، كون قتا(ـ هـ) = ١ / جا(ـ هـ)



ومن الشكل

ص ⟵ جاهـ

ـ ص ⟵ جاـ هـ

لذلك جا(ـ٤٥°) = ـ جا٤٥° = ـ ١ / √٢

وكذلك قتا(ـ٤٥°) = ـ قتا٤٥° = ـ √٢

iii. [ظا(ـ هـ) = ـ ظاهـ] وكذلك ظتا(ـ هـ) = ـ ظتاهـ، كون ظتا(ـ هـ) = ١ / ظا(ـ هـ)

بما أن ظا(ـ هـ) = جا(ـ هـ) / جتا(ـ هـ) = ـ جاهـ / جتا هـ = ـ ظاهـ

لذلك ظا(ـ٦٠°) = ـ ظا٦٠° = ـ √٣

وكذلك ظتا(ـ٦٠°) = ـ ظتا٦٠° = ـ ١ / √٣

وبشكل عام: جتا(ـ هـ) = جتاهـ

جا(ـ هـ) = ـ جاهـ

ظا(ـ هـ) = ـ ظاهـ

لكل ٠ < هـ < ٣٦٠°

وهكذا لبقية الاقترانات الدائرية ومنها:

جا(ـ١٢٠°) = ـ جا١٢٠° = ـ جا(١٨٠° ـ ٦٠°)

= ـ جا٦٠° = ـ √٣ / ٢

وكذلك جتا(ـ١٢٠°) = جتا١٢٠° = جتا(١٨٠° ـ ٦٠°)

= ـ جا٦٠° = ـ ١ / ٢

وكذلك ظا(ـ٢٤٠°) = ـ ظا٢٤٠° = ـ ظا(١٨٠° + ٦٠°)

= ـ ظا٦٠° = ـ √٣

هذا وهناك أسلوب آخر لإيجاد النسب المثلثية للزوايا السالبة هو أن نحول قياسها إلى موجب وهكذا.

⇦ مثال: أوجد جا(ـ ٣٠°)

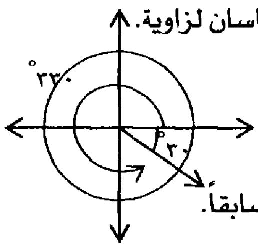
بما أن |ق١| + |ق٢| = ٣٦٠° (دورة كاملة)

فإن

|الموجب| + |ـ٣٠°| = ٣٦٠°

∴ القياس الموجب = ٣٦٠° ـ ٣٠° = ٣٣٠°

أي أن جا(ـ ٣٠°) = جا ٣٣٠° كون ـ ٣٠°، ٣٣٠° قياسان لزاوية.



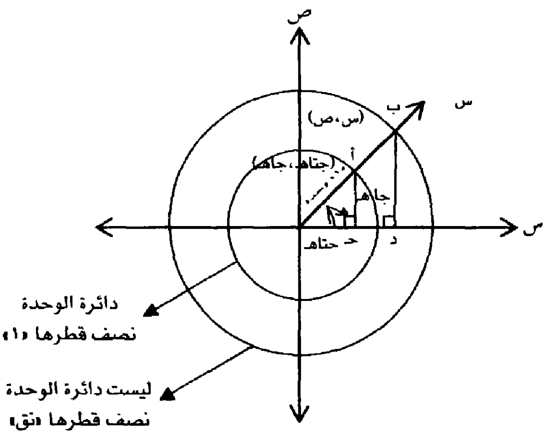
∴جا(ـ ٣٠°) = جا ٣٣٠° = جا(٣٦٠° ـ ٣٠°)

$= -$ جا ٣٠° $= -\frac{١}{٢}$

وكأن جا(ـ ٣٠°) = ـ جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$ كما مر سابقاً.

رابعاً: إيجاد الاقترانات الدائرية بشكل عام

دون استعمال دائرة الوحدة وإنما باستخدام نصف قطرها نق.



حيث نق ≠ ١

فإما نق <١ أو نق >١

وحيث

أ م = ١ وحدة

ب م = نق وحدة

المثلثان ب د م، أ جـ م متشابهان (تساوي الزوايا المتناظرة)

ينتج: $\frac{\text{ب د}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{د م}}{\text{جـ م}}$

ومنه: $\frac{\text{ص}}{\text{جاهـ}} = \frac{\text{نق}}{١}$

∴ نق × جاهـ = ص

∴ جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ كما في النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية

وكذلك $\frac{\text{نق}}{\text{١}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{جتاهـ}}$

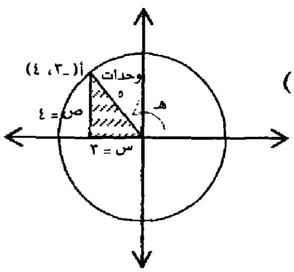
∴ نق × جتاهـ = س

∴ جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ كما في النسب المثلثية في المثلث القائم الزاوية

⇦ مثال: إذا مرَّ ضلع الانتهاء للزاوية التي قياسها هـ بالنقطة أ(ـ٤ ، ٣) أوجد الاقترانات الدائرية للزاوية هـ.

الحل:

بما أن النقطة أ لا تحقق معادلة دائرة الوحدة فالدائرة هي غير دائرة الوحدة ومعادلتها.



س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} (كون مركزها نقطة بها ص)

∴ (ـ٣)^{٢} + (٤)^{٢} = نق^{٢} ⟵ نق^{٢} = ٢٥

∴ نق = ٥ وحدات

جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ = $\frac{٤}{٥}$ = ٠,٨

جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ = $\frac{\text{ـ٣}}{٥}$ = ـ ٠,٦

ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{٠,٨}{\text{ـ٠,٦}}$ = ـ $\frac{٨}{٦}$ = ـ $\frac{٤}{٣}$ = ـ ١,٣٣ تقريباً

ظتاهـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$ = $\frac{\text{ـ٠,٦}}{٠,٨}$ = ـ $\frac{٦}{٨}$ = ـ $\frac{٣}{٤}$ = ـ ٠,٧٥

قاهـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{١}{\text{ـ٠,٦}}$ = ـ $\frac{١}{٠,٦}$ = ـ $\frac{١٠}{٦}$ = ـ $\frac{٥}{٣}$ = ـ ١,٦٦ تقريباً

قتاهـ = $\frac{١}{\text{جاهـ}}$ = $\frac{١}{٠,٨}$ = $\frac{١٠}{٨}$ = $\frac{٥}{٤}$ = ١,٢٥

لاحظ أن جاهـ ∈ [ـ١، ١] وكذلك جتاهـ ∈ [ـ١، ١].

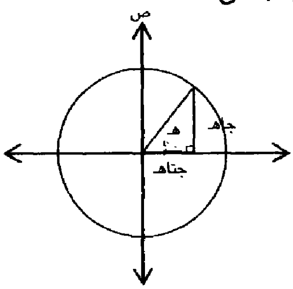
⇦ مثال: إذا كانت الزاوية هـ تقع في الربع الأول وكان ظاهـ = ٢

أوجد جميع الاقترانات الدائرية الأخرى للزاوية هـ

بما أن ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{٢}{١}$ وبالضرب التبادلي

فإن جاهـ = ٢جتاهـ

لكن جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١ كونها تناظر س^{٢} + ص^{٢} = ١



∴ جتا^{٢}هـ + (٢جتاهـ)^{٢} = ١

∴ جتا^{٢}هـ + ٤جتا^{٢}هـ = ١

٥ جتا^{٢}هـ = ١

جتا^{٢}هـ = $\frac{١}{٥}$

∴ جتاهـ = $\pm\sqrt{\frac{١}{٥}}$

وبما أن ∢ هـ تقع في الربع الأول فجميع الاقترانات الدائرية لها موجبة

جتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

جاهـ = ٢ $\left(\frac{١}{\sqrt{٥}}\right)$ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

ظاهـ = $\frac{\frac{٢}{\sqrt{٥}}}{\frac{١}{\sqrt{٥}}}$ = ٢ كما هو وارد في السؤال

ظتاهـ = $\frac{\frac{١}{\sqrt{٥}}}{\frac{٢}{\sqrt{٥}}}$ = $\frac{١}{٢}$ أو ظتاهـ = $\frac{١}{\text{ظاهـ}}$

قاهـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٥}}}$ = $\sqrt{٥}$

قتاهـ = $\frac{١}{\text{جاهـ}}$ = $\frac{١}{\frac{٢}{\sqrt{٥}}}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

هـذا مثـال علـى استخدام الآلـة الحاسبة لإيجـاد قيـاس الزاوية ← بمعرفة اقترانها الدائري وإيجاد اقتران الزاوية ← بمعرفة قياسها.

⇦ مثال: أوجد الاقترانات الدائرية للزوايا باستخدام الآلة الحاسبة:

(١) جا٣٥° (٢) جتا١٧٠° (٣) ظا٣٢٣°

جا٣٥° = ٠,٥٧ مباشرة من الآلة الحاسبة

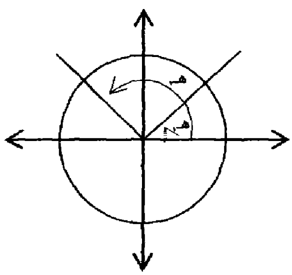
جتا ١٧٠° = جتا (١٨٠° ـ ١٠°) = ـ جتا١٠° = ـ ٠,٩٨

ظا ٣٢٣° = جتا (٣٦٠° ـ ٣٧°) = ـ ظا٣٧° = ٠,٧٥

⇦ مثال: أوجد قياس كل من الزوايا باستخدام الآلة الحاسبة

(١) جاهـ = ٠,٨٥

هناك زاويتان في الربعين الأول والثاني جيبها موجب:



∢هـ$_1$ = ٠,٨٥

فإن ∢هـ$_1$ = ٥٩° من الآلة الحاسبة

لكن جاهـ$_2$ = جا(١٨٠° ـ ٥٩°) = جا ١٢١°

وأن ∢هـ$_2$= ١٢١° بالربع الثاني

فالزاوية هـ إما ٥٩° أو ١٢١°

(٢) جتاهـ= ـ ٠,٢٢

هناك زاويتان هـ$_1$، هـ$_2$ جتاهما سالب في الربعين الثاني والثالث

لكن جتاهـ= ٠,٢٢ كزاوية مرجع

فإن ∢هـ = ٧٧°

∴ ∢هـ$_1$ = ١٨٠° ـ ٧٧° = ١٠٣° (الربع الثاني)

∢هـ$_2$ = ١٨٠° + ٧٧° = ٢٥٧° (الربع الثاني)

(٢) ظاهـ = ٢,٩

هناك زاويتان ظل كل منهما هو ٢,٩ موجب في الربعين الأول والثالث

لكن ∢هـ المرجع = ٧١°

∴ ∢هـ$_1$ = ٧١°

∢هـ = ١٨٠° + ٧١° = ٢٥١°

مع ملاحظة ان الآلة الحاسبة تقوم مقام الجداول المقابلة – إيجاد قياس الزاوية بمعرفة النسب المثلثية لها – فاستخدام الآلة الحاسبة ضروري في الرياضيات وهو الأفضل لذا وجب التنويه.

(١١ - ٣) التمثيل البياني للاقترانات الدائرية:

الاقتران الدوري Periodic Function هو الاقتران الذي يحقق المساواة:

ق (س + أ) = ق(س) لكل س في مجاله حيث أ عدد حقيقي ثابت، وتسمى أصغر قيمة حقيقية موجبة للعدد أ التي تحقق العلاقة السابقة دورة الاقتران.

ولما كانت جتا(س) = جتا(س + ٢ م π) حيث م $\in$ ص

وكذلك جا(س) = جا(س + ٢ م π) حيث م $\in$ ص

وكذلك ظا(س) = ظا(س + م π) حيث م $\in$ ص

فإن الاقترانات الدائرية اقترانات دورية، لذا فإنها تتمتع بصفة التكرار أو الدورية كون الاقترانات

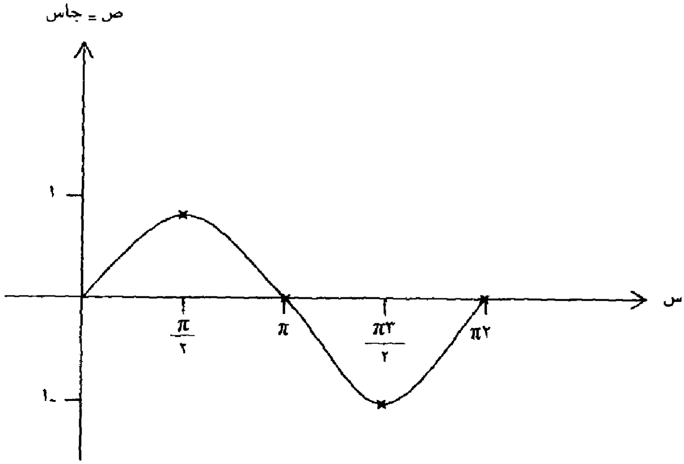
ق$_1$(س) = جتاس ، ق$_2$(س) = جاس

ق$_3$(س) = قاس ، ق$_4$(س) = قتاس

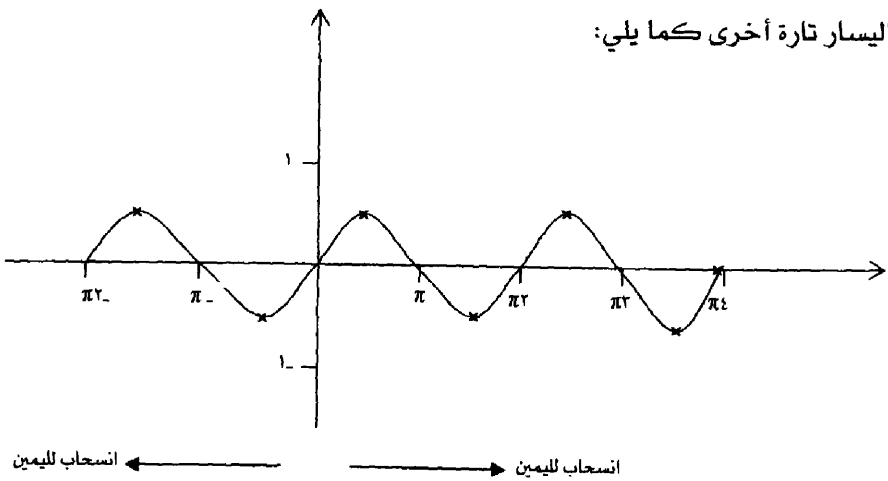
اقترانات دورية ودورتها ٢π حيث منحناها يكرر نفسه كل ٢π من الزوايا هكذا:

لتمثيل منحنى الاقتران ق(س) = جاس، تكون جدولاً ببعض قيم المتغير س في الفترة [٠، ٢π] وقيم الاقتران ق(س) عند كل منها وباستخدام الزوايا المشهورة والمحورية يكون الجدول كالتالي:

س الزاوية	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{١}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س) = جاس	٠	٠.٥	٠.٧	٠.٨	١	٠	١ـ	٠



وهذا المنحنى يكرر نفسه وكأنه انسحاب أفقي نحو اليمين تارة ونحو اليسار تارة أخرى كما يلي:



لاحظ أن أكبر قيمة للاقتران = ١

وأصغر قيمة له = ـ١

لذلك فإن مداه هو الفترة [ـ١ ، ١] حيث ـ١ ≤ جاس ≤ ١

أي أن:

مدى الاقتران ق(س)= جاس هو الفترة [ـ١ ، ١]

وأما مجاله فهو الفترة (ـ∞، ∞) أو ح

وكأنه اقتران من: ح ⟵ [ـ١ ، ١]

المجال ⟵ المدى

وسعة الاقتران (دورياً محدوداً)

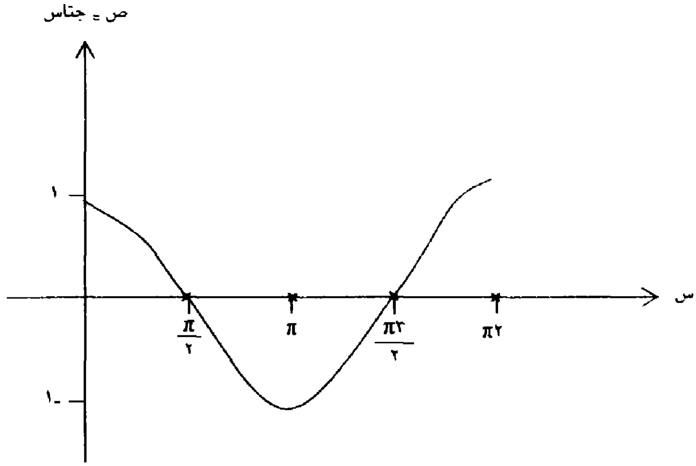
$$= \frac{\text{أكبر قيمة للاقتران ـ أصغر قيمة للاقتران}}{٢}$$

فسعة اقتران ق(س) = جاس = $\frac{١ـ (ـ١)}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ =١

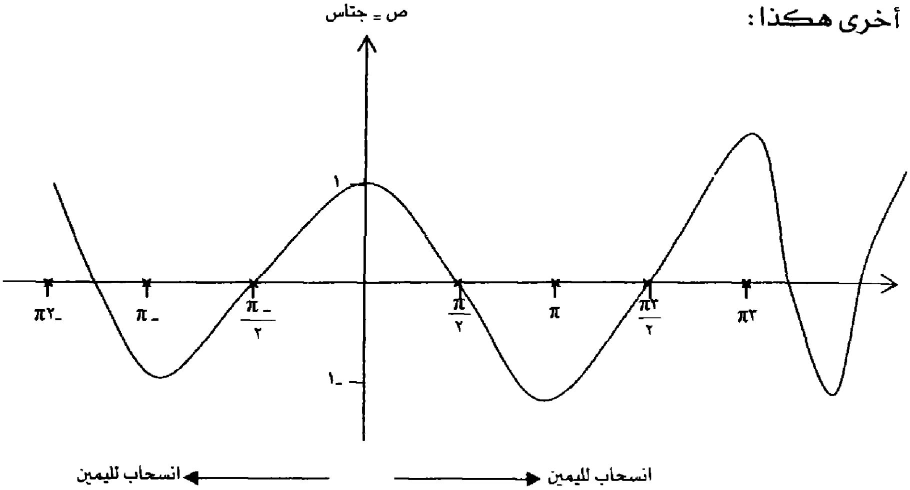
وبأسلوب مماثل نمثل منحنى الاقتران ق(س) = جتاس

في الفترة [٠ ، ٢π] بعد بناء الجدول التالي:

س الزاوية	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س) = جتاس	١	٠.٨	٠.٧	٠.٥	٠	ـ١	صفر	١



وهذا المنحنى يكرر نفسه وكأنه انسحاب أفقي لليمين تارة ولليسار تارة أخرى هكذا:



لاحظ أن أكبر قيمة للاقتران = ١

وأصغر قيمة للاقتران = -١

لذلك فإن مداه هو الفترة [-١ ، ١] حيث -١ ≤ جتاس ≤ ١

أما مجاله فهو الفترة (- ∞، ∞) أو ح

وسعة الاقتران (دورياً محدوداً) = $\frac{\text{أكبر قيمة للاقتران - أصغر قيمة للاقتران}}{٢}$

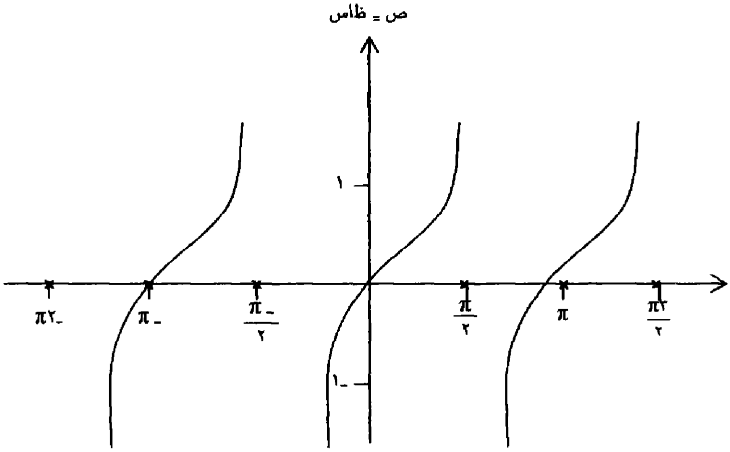
فسعة اقتران ق(س) = جتاس = $\frac{١ - -١}{٢}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١

ودورته = π٢

بينما الاقترانات ق٥(س) = ظاس

ق٦(س) = ظتاس

اقترانات دورية ودورتها π حيث منحناها يكرر نفسه قبل π من الزوايا هكذا.



وتسمى الخطوط الرئيسية المارة بالزوايا $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$ ، .... خطوط التقارب يقترب منها المنحنى ق(س) = ظاس ولا يقطعها كون ظا $\frac{\pi}{٢}$ ، - ظا $\frac{\pi}{٢}$ ، ... غير معرفة أو غير معينة.

مجال ق(س) = ظاس هو ح - { م π } حيث م ∈ ص

مداه ح أو (- ∞، ∞)

دورته = π

سعته = لا يوجد كونه غير محدود إطلاقاً

وبشكل عام سنركز على الاقترانات $ق_{١}$(س) = جتاس

$ق_{٢}$(س)= جاس لإيجاد السعة والدورة كما يلي:

إذا كان $ق_{١}$(س) = أجتاب س

وكذلك $ق_{٢}$(س) = أجاب س

فإن

سعة الاقتران لكل منهما = | معامل الاقتران | = | أ | فالسعة دائماً موجبة

ودورة الاقتران لكل منهما = $\frac{٢\pi}{|\text{معامل الزاوية}|}$ = $\frac{٢\pi}{|\text{ب}|}$ والدورة دائماً موجبة

⇦ مثال: جد دورة وسعة الاقترانات التالية ومثل منحنى كل منهما:

(١) ق(س) = جا٢س

(٢) ق(س) = ـ٢ جتا $\frac{\text{س}}{٣}$

ق(س) = جا٢س

السعة = | ١ | = ١

الدورة = $\frac{٢\pi}{٢} = \pi$

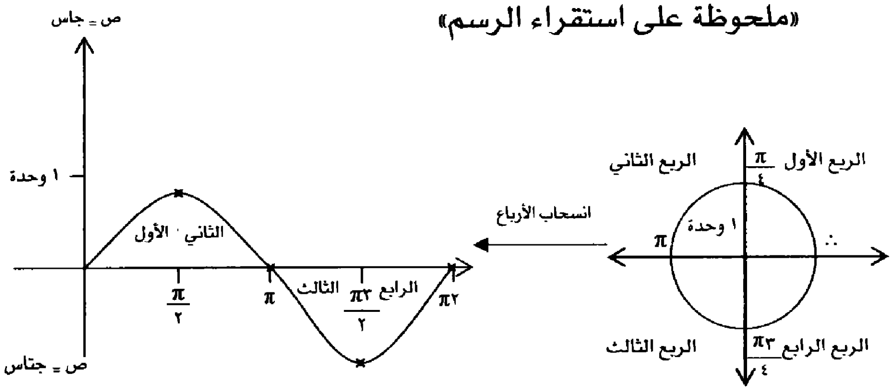
ق(س) = ـ٢ جتا $\frac{\text{س}}{٣}$

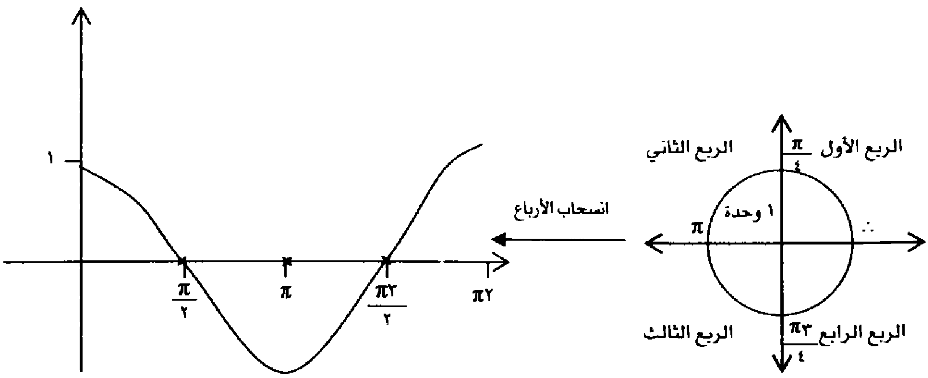
السعة = | ـ٢ | = ٢

الدورة = $\frac{٢\pi}{\left|\frac{١}{٣}\right|} = \frac{٢\pi}{\frac{١}{٣}} = ٢\pi \times ٣ = ٦\pi$

وأما تمثيل منحنى كل منهما يتم بعمل الجدول كما مر وسبق.

«ملحوظة على استقراء الرسم»





والملاحظ أن منحنى الاقتران: $ق_١(س)$ = جا س، $ق_٢(س)$ = جتا س لدورة واحدة كأنه انسحاب للأرباع بالكيفية الموضحة أعلاه.

⇦ مثال: مثّل الاقتران ق(س) = جتا س + جا س في الفترة [٠ ، ٢π] بيانياً ثم جد سعته ودورته

نكون الجدول التالي:

س	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
ق(س) = جتاس	١	١.٣	١.٤	١.٣	١	١-	١-	١

ق(٠) = جتا صفر + جا صفر = ١ + ٠ = ١

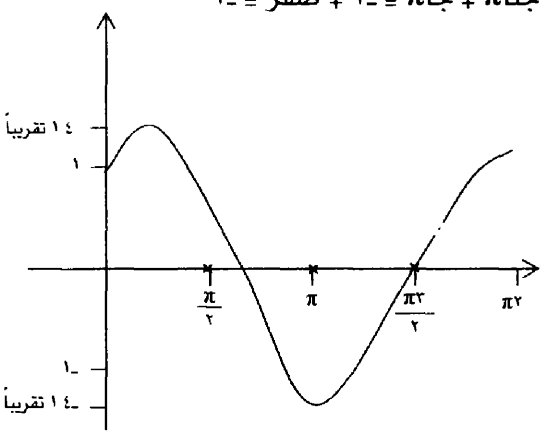
$ق(\frac{\pi}{٦}) = جتا \frac{\pi}{٦} + جا \frac{\pi}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢} = \frac{١.٧+١}{٢}$

$= \frac{٢.٧}{٢}$ = ١.٣ تقريباً

⋮

وهكذا

ق(π) = جتاπ + جاπ = ١- + صفر = ١-



سعة الاقتران ق(س) = جتاس + جاس هي:

$= \frac{١.٤ - (-١.٤)}{٢} = \frac{١.٤ + ١.٤}{٢} = \frac{٢.٨}{٢} = ١.٤$

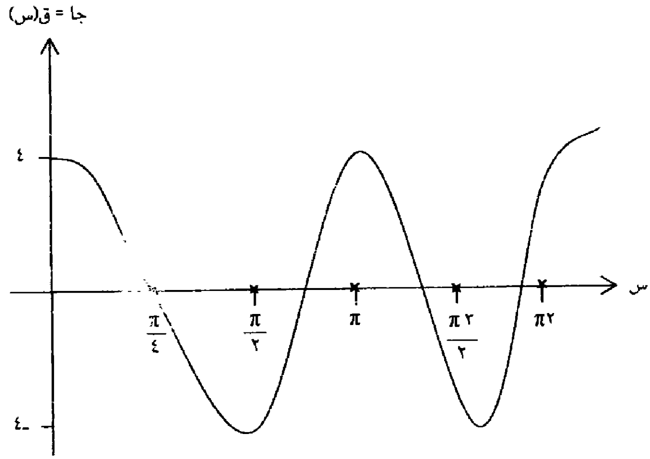
دورته =2π كونه (جتاس + جاس).

⇦ مثال: أوجد سعة ودورة الاقتران ق(س) = ـ ٤جتا(٢س ـ π) ومثل منحناه في الفترة [٠، 2π].

السعة = | معامل الاقتران | = | ـ٤ | = ٤

الدورة = $\frac{2\pi}{|\text{معامل الزاوية}|}$ = $\frac{2\pi}{|2|}$ = $\frac{2\pi}{2}$ = π

وأما منحناه فهو كالتالي:



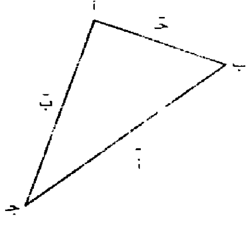
(١١ ـ ٤) قوانين تتعلق بالمثلث «مساحته وأضلاعه وزواياه»

بما أن المثلث شكل هندسي محاط بثلاث قطع مستقيمة تسمى الأضلاع تضم بينها ثلاث زوايا لذا فللمثلث ٦ عناصر هي:

الأضلاع؛ أ ب، ب جـ، جـ أ

الزوايا؛ ∢أ، ∢ب، ∢جـ

لذا تسمى الأضلاع كما يلي:



$\bar{أ}$ الضلع المقابل للزاوية ∢ أ

$\bar{ب}$ الضلع المقابل للزاوية ∢ ب

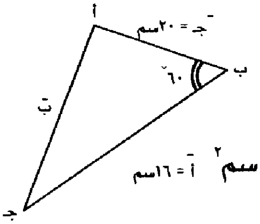
$\bar{جـ}$ الضلع المقابل للزاوية ∢ جـ

(١) مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب الضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

وبالرموز مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أ̄ × ب̄ × جاجـ

⇦ مثال:

إحسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي فيه أ̄ = ١٦سم، جـ̄ = ٢٠سم ∢ ب= ٦٠°



مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ١٦× جا٦٠°

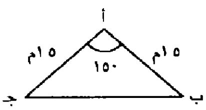
مساحة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠× ١٦ × جا٦٠°

= (١٠) (١٦) ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨٠$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

لكن $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢ (الآلة الحاسبة)

∴ مساحة المثلث= ٨٠ (١,٧٣٢) = ١٣٨,٥٦٠ سم^{٢}

⇦ مثال: نافذة على شكل مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه ١,٥م والزاوية بينهما ١٥٠° احسب ثمن الزجاج اللازم له علماً بأن سعر المتر المربع من الزجاج يساوي ١٢ دينار؟



مساحة النافذة = مساحة المثلث

= $\frac{١}{٢}$ × ١,٥ × ١,٥ × جا١٥٠°

لكن جا١٥٠° = (١٨٠° - ٣٠°)= جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

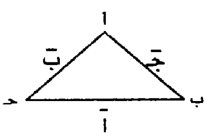
∴ مساحة النافذة = ($\frac{١}{٢}$) (١,٥) (١,٥) ($\frac{١}{٢}$)

= ($\frac{١}{٢}$) ($\frac{٣}{٢}$) ($\frac{٣}{٢}$) ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٩}{١٦}$ م^{٢}

ثمن الزجاج = ($\frac{٩}{١٦}$) (١٢) = $\frac{٢٧}{٤}$ = ٦,٧٥ دينار

(٢) قانون الجيب The Sine Rule

إنه قانون يربط أضلاع المثلث بزواياه كما يلي:



في المثلث أ ب جـ الذي أضلاعه أ̄، ب̄، جـ̄

وزواياه ∢أ، ∢ب، ∢جـ

فإن النسبة بين طول أي ضلع فيه إلى جيب الزاوية المقابلة له نسبة ثابتة

وبالرموز $\frac{\bar{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\bar{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$ وهذا يسمى قانون الجيوب

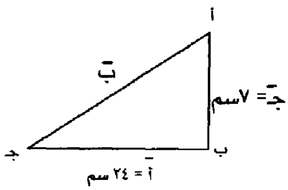
وأما المقلوب $\frac{\text{جا أ}}{\bar{\text{أ}}} = \frac{\text{جا ب}}{\bar{\text{ب}}} = \frac{\text{جا جـ}}{\bar{\text{جـ}}}$ مع أنه صواب إلاّ أنه لا يسمى قانون الجيب

وكلا الصيغتين تستعملان في حل المثلث Solution of the Triangle

والمقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه غير المعلومة أي يجب معرفة ثلاثة عناصر في المثلث على الأقل ضلع منها لمعرفة العناصر الباقية.

⇦ مثال: أ ب جـ مثلث فيه $\bar{\text{جـ}}$ = ٧سم، $\bar{\text{أ}}$ = ٢٤سم، ∢ب=٩٠°

أوجد قياس ∢أ، جتاس ∢ جـ، $\bar{\text{ب}}$



من قانون الجيوب:

$$\frac{\bar{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\bar{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$$

أي أن $\frac{٢٤}{\text{جا أ}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{٧}{\text{جا جـ}}$

لكن $(\bar{\text{ب}})^{٢} = (\bar{\text{أ}})^{٢} + (\bar{\text{جـ}})^{٢}$ نظرية فيثاغورس

$(\bar{\text{ب}})^{٢} = (٧)^{٢} + (٢٤)^{٢} = ٤٩ + ٥٧٦ = ٦٢٥$

∴ $\bar{\text{ب}}$ = ٢٥سم

أي أن $\frac{٢٤}{\text{جا أ}} = \frac{٢٥}{\text{جا ٩٠}} = \frac{٧}{\text{جا جـ}}$

أي أن $\frac{٢٤}{\text{جا أ}} = \frac{٢٥}{١}$

جا أ = $\frac{٢٤}{٢٥}$ = ٠,٩٦

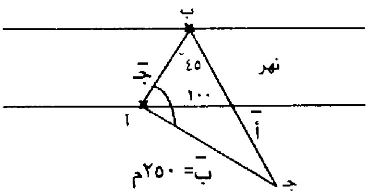
∴ ∡أ = ٧٤° لأقرب درجة (من الآلة الحاسبة)

وكذلك $\frac{٢٥}{١}$ = $\frac{٧}{\text{جا أ}}$

٢٥ جا جـ = ٧

جا جـ = $\frac{٧}{٢٥}$ = ٠,٢٨ ∴ ∡ جـ =١٦° لأقرب درجة (من الآلة الحاسبة)

⇦ مثال تطبيقي: أراد مسَّاح أن يقيس عرض نهر بين النقطتين أ ، ب الواقعتين على ضفتيه، فعين النقطة جـ على اليابسية جهة أ نفسها وتبعد عنها ٢٥٠ متراً كما في الشكل ووجد أن ∡جـ أ ب = ١٠٠° وأن



∡جـ أ ب =٤٥° من عرض النهر؟ (جـ̄)

باستخدام قانون الجيوب:

$\frac{\bar{أ}}{\text{جا أ}}$ = $\frac{\bar{ب}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\bar{جـ}}{\text{جا جـ}}$

علينا أن نكون تناسب معروفة فيه ٣ عناصر لمعرفة العنصر الرابع هكذا

$\frac{\bar{ب}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\bar{جـ}}{\text{جا جـ}}$ لكن ∡جـ = ١٨٠° ـ (١٠٠° + ٤٥°) = ١٨٠° ـ ١٤٥° = ٣٥°

$\frac{٢٥٠}{\text{جا ٤٥}}$ = $\frac{\bar{جـ}}{\text{جا ٣٥}}$ وفي الآلة الحاسبة

$\frac{٢٥٠}{٠.٧٠}$ = $\frac{\bar{جـ}}{٠.٥٧}$

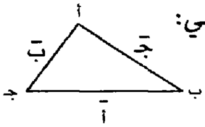
∴ $\frac{\bar{جـ}\ ٠.٧٠}{٠.٧٠}$ = $\frac{(٢٥٠)\ (٠.٥٧)}{٠.٧٠}$

جـ̄ = $\frac{(٢٥٠)\ (٠.٥٧)}{٠.٧٠}$ = ٢٠٣ متر

∴ عرض النهر= ٢٠٣ متر.

(٣) قانون جيب التمام The Cosine Rule

إنه القانون الذي يربط أضلاع المثلث بزواياه كما يلي:



في المثلث أ ب جـ حيث

زواياه ∢أ، ∢ب، ∢جـ

وأضلاعه $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{جـ}$ كما في الشكل

فإن $(\overline{أ})^{٢} = (\overline{ب})^{٢} + (\overline{جـ})^{٢} - ٢\,\overline{ب}\,\overline{جـ}$ جتا أ

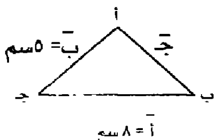
وإن $(\overline{ب})^{٢} = (\overline{أ})^{٢} + (\overline{جـ})^{٢} - ٢\,\overline{أ}\,\overline{جـ}$ جتا ب

ثم إن $(\overline{جـ})^{٢} = (\overline{أ})^{٢} + (\overline{ب})^{٢} - ٢\,\overline{أ}\,\overline{ب}$ جتا جـ

ويستخدم هذا القانون في حل المثلث أي إيجاد قياسات زواياه وأطوال أضلاعه الغير معلومة.

⇦ مثال: أ ب جـ مثلث فيه $\overline{أ}$ = ٨ سم، $\overline{ب}$ = ٥سم، ∢جـ = ٦٠°

أوجد طول $\overline{جـ}$



$(\overline{جـ})^{٢} = (٨)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢\,(٨)\,(٥)$ جتا جـ

$= ٦٤ + ٢٥ - ٨٠ \times \frac{١}{٢}$

$= ٨٩ - ٤٠ = ٤٩$

$\therefore \overline{جـ} = \sqrt{٤٩} = ٧$سم.

سنناقش حل المثلث كتطبيق على قوانين الجيب وجيب التمام:

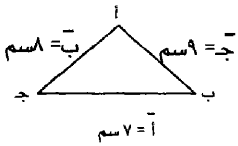
«لحل المثلث كما أسلفنا نجد العناصر ـ زواياه وأضلاعه غير المعلومة ـ تستخدم قانون الجيب وقانون جيب التمام».

ولكن السؤال: متى تستخدم كلاً منهما؟

بشيء من الإيجاز الشديد عندما تكون أضلاع المثلث جميعها معلومة تستخدم قانون جيب التمام فقط وإلاّ فتستخدم أياً منهما كما يلي:

⇦ مثال: حل المثلث أ ب جـ الذي فيه $\bar{\text{أ}}$ =٧سم، $\bar{\text{ب}}$ = ٨سم، $\bar{\text{جـ}}$ =٩سم

هذه الحالة لا تستخدم إلا قانون جيب التمام:



$(\bar{\text{أ}})^{٢} = (\bar{\text{ب}})^{٢} + (\bar{\text{جـ}})^{٢} - ٢\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{جـ}}$ جتا أ

$(٧)^{٢} = (٨)^{٢} + (٩)^{٢} - ٢\ (٨)\ (٩)$ جتا أ

٤٩= ٦٤ + ٨١ ـ ١٤٤ جتا أ

٤٩= ١٤٥ ـ ١٤٤ جتا أ

ـ ٩٦= ـ ١٤٤ جتا أ

جتا أ = $\frac{٩٦}{١٤٤}$ = ٠,٦٦ من الآلة الحاسبة

∴ ∢ أ = ٤٢°

$(\bar{\text{ب}})^{٢} = (\bar{\text{أ}})^{٢} + (\bar{\text{جـ}})^{٢} - ٢\bar{\text{أ}}\,\bar{\text{جـ}}$ جتا ب

٦٤= ٤٩ + ٨١ ـ ١٢٦ جتا أ

٦٤= ١٣٠ ـ ١٢٦ جتا أ

ـ ٦٦= ـ ١٢٦ جتا أ

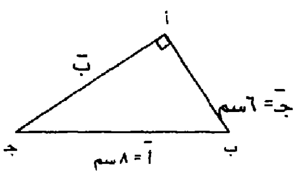
∴جتا ب = $\frac{٦٦}{١٢٦}$ = ٠,٥٢ من الآلة الحاسبة

∢ ب = ٣١°

∴ = ١٨٠ ـ (٣١° + ٤٢°) = ١٨٠ ـ ٧٣ = ١٠٧°

⇦ مثال: حل المثلث أ ب جـ الذي فيه ∢أ= ٩٠° ، $\bar{\text{جـ}}$ = ٦سم، $\bar{\text{أ}}$ = ٨سم

هنا يمكن استخدام قانون الجيب كما يلي:



$\frac{\bar{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\bar{\text{جـ}}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{٨}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{٦}{\text{جا جـ}}$

نبدأ $\frac{8}{1} = \frac{6}{\text{جا جـ}}$ ← بالضرب التبادلي ٨ جا جـ = ٦

جا جـ = $\frac{6}{8}$ = ٠,٧٥

∴ ∢جـ = ٤٩° من الآلة الحاسبة

ومنه ∢ ب = ١٨٠° ـ (٩٠° + ٤٩°) = ١٨٠° ـ ١٣٩° = ٤١°

وكذلك $\frac{8}{1} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ٤١}}$

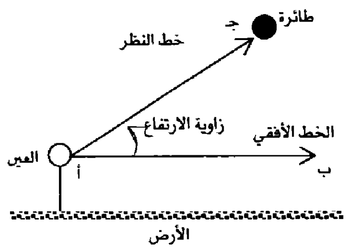
ب̄ = (٨) (٠,٦٥) = ٥,٢٠ = ٥,٢سم.

سنناقش الآن زوايا الارتفاع والانخفاض:

كتطبيق آخر على قوانين الجيب وجيب التمام

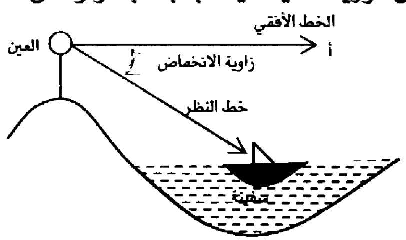
زاوية الارتفاع Angle Elevation

هي الزاوية التي ضلعها الخط الأفقي الشعاع (أب←) وخط النظر (الشعاع أجـ←) عندما ننظر إلى الأعلى لرؤية قمة برج أو طائرة في كبد السماء كما في الشكل.

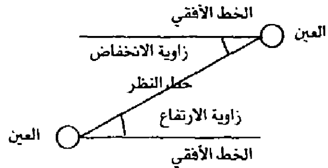


زاوية الانخفاض Angle of Depression

هي الزاوية التي ضلعها الخط الأفقي الشعاع (أب←) وخط النظر (الشعاع أجـ←) عندما ننظر إلى الأسفل لرؤية سفينة في عباب البحر ونحن على قمة الجبل كما في الشكل.



والعلاقة بين الزاويتين هو التساوي لوقت واحد عند النظر إلى طائرة في السماء وبنفس الوقت إلى سفينة في البحر هكذا



ملحوظة:

يستخدم لقياس زوايا الارتفاع والانخفاض جهاز خاص يسمى جهاز الثيودوليت Theodolite.

⇦ مثال: تطير طائرة في خط مستقيم على ارتفاع ثابت مقداره ٢٠٠٠ متر عن أرض أفقية، أبصر الطيار معسكراً ووجد أن قياس زاوية انخفاضه ٢٠° إحسب بعد الطيار عن المعسكر.

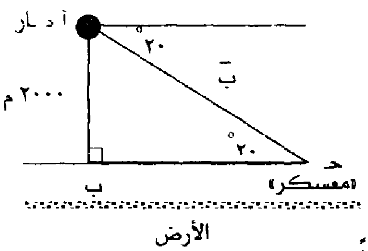
المطلوب إيجاد بَ

من قانون الجيب

$\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{٢٠٠٠}{\text{جا } ٢٠}$ وحيث زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع = ٢٠°

$\frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{٢٠٠٠}{٠.٣٤}$ من الآلة الحاسبة

$\frac{\text{بَ}}{١} = \frac{٢٠٠٠}{٠.٣٤}$

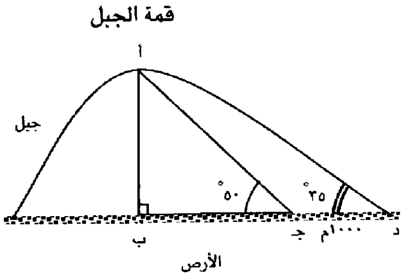


$\text{بَ} = \frac{٢٠٠٠}{٠.٣٤} = ٥٨٨٢$ متر

∴ بعد الطيار عن المعسكر هو ٥٨٨٢ متراً.

⇦ مثال تطبيقي: من نقطة على سطح الأرض، وجد شخص أن زاوية ارتفاع قمة جبل ٣٥° ثم سار مسافة ١٠٠٠ متر باتجاه الجبل فوجد أن زاوية ارتفاع قمة الجبل

٥٠° أوجد ارتفاع الجبل عن سطح الأرض.



المطلوب إيجاد أ ب:

نستخدم الظل هنا أفضل.

ظا٥٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ظا٣٥° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ} + ١٠٠٠}$

ومن الآلة الحاسبة:

١,٢ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

ومنه أ ب = ١,٢ ب جـ .... (١)

٠,٧ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ} + ١٠٠٠}$

ومنه أ ب = ٠,٧ (ب جـ + ١٠٠٠) .... (٢)

من (١) ، (٢) : ١.٢ ب جـ = ٠.٧ ب جـ + ٧٠٠

٠,٥ ب جـ = ٧٠٠

ب جـ = $\frac{٧٠٠}{٠.٥}$ = $\frac{٧٠٠٠}{٥}$ = ١٤٠٠ متر.

∴ أ ب = ١,٢ (١٤٠٠) = ١٦٨٠,٠

= ١٦٨٠ متراً تقريباً.

(١١ ـ ٥) المتطابقات المثلثية Trigonoetric Identities

المُتطابقة: جملة مفتوحة صحيحة لجميع القيم الممكنة للمتغير فيها، وحل المتطابقة ليس معناه إيجاد قيم المتغير ذاك وإنما معناه: بيان صحتها كونها دائمة الصواب.

ليس للمطابقة حلول على الإطلاق كالمعادلة أو المتباينة كون حلولها غير نهائية.

المتطابقة المثلثية هي المتطابقة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً أو أكثر.

سنورد هذه المتطابقات في ست مجموعات كونها كثيرة العدد متنوعة المضمون ليصبح سردها سهلاً ومقبولاً وبلا غموض، ولتستطيع استخدامها في بيان صحة غيرها من المتطابقات، كما هو آت:

المجموعة الأولى:

ظهرت هذه المجموعة من المتطابقات كتطبيق مباشر على دائرة الوحدة س^2 + ص^2 = ١، وهكذا لأن س= جتاهـ، ص = جاهـ بالتعريف واعتماداً على دائرة الوحدة.

فإن جتا^{2}هـ + جا^{2}هـ = ١ ...... (١)

وبعد قسمة طرفي المتطابقة على جتا^{2}هـ $\neq$ صفر

ينتج: ١ + ظا^{2}هـ = قا^{2}هـ ...... (٢)

ثم بعد قسمة طرفي المتطابقة الأولى على جا^{2}هـ $\neq$ صفر

ينتج: ظتا^{2}هـ + ١ = قتا^{2}هـ ...... (٣)

⇦ مثال تطبيقي: وجد جتا^{2}٤٥$^\circ$ + جا^{2}٤٥$^\circ$

الجواب: جتا^{2}٤٥$^\circ$ + جا^{2}٤٥$^\circ$ حالة خاصة من المتطابقة

جتا^{2}هـ + جا^{2}هـ = ١

∴ جتا^{2}٤٥$^\circ$ + جا^{2}٤٥$^\circ$ = ١

والتفسير: جتا^{2}٤٥$^\circ$ + جا^{2}٤٥$^\circ$ = $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

وكذلك: جتا^{2}٣٠$^\circ$ + جا^{2}٣٠$^\circ$ =١

وكذلك: جتا^{2}٦٠$^\circ$ + جا^{2}٦٠$^\circ$ =١

المجموعة الثانية:

ظهرت هذه المجموعة من المتطابقات كصيغ لاقترانات دائرية تمثل مجموع زاويتين أو الفرق بينهما كما يلي:

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب (٤) «انتبه لترتيب الإشارات»

جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب (٥) «انتبه لترتيب الإشارات»

ظا (أ ± ب) = جا أ $\frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{١ \mp \text{ظا أ ظا ب}}$ (٦) «انتبه لترتيب الإشارات»

⇦ مثال: أوجد جتا١٥°، جا١٥°، ظا١٥° دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة.

من المعلوم أن ١٥° = ٤٥° ـ ٣٠° والزاويتين ٤٥°، ٣٠° من الزوايا المشهورة لذلك

جتا١٥° = جتا (٤٥° ـ ٣٠°) = جتا٤٥° جتا٣٠° + جا٤٥° جا٣٠°

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$$

جا١٥° = جا (٤٥° ـ ٣٠°) = جا٤٥° جتا٣٠° - جتا٤٥° جا٣٠°

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) - \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

ظا١٥° = ظا (٤٥° ـ ٣٠°) = $\frac{\text{ظا ٤٥°} - \text{ظا ٣٠°}}{١ + \text{ظا٤٥° ظا ٣٠°}}$

$$= \frac{١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣}}}{\frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} + ١}$$

هناك حل آخر للمثال باعتبار ١٥° = ٦٠° ـ ٤٥° تأكد منه أنت بالذات

⇦ مثال: أوجد قيمة جتا٤٠° جتا٢٠° ـ جا٤٠° جا٢٠°

هذا تطبيق على معكوس المتطابقة جتا (أ+ ب) = جتا أ جتا ب ـ جا أ جا ب

أي أن جتا٤٠° جتا٢٠° ـ جا٤٠° جا٢٠° = جتا (٤٠° + ٢٠°) = جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

المجموعة الثالثة:

ظهرت هذه المتطابقات كصيغ لاقترانات تمثل ضعف الزاوية هكذا

جا٢أ = ٢جاأ جتاأ — ويوضع أ $\xleftarrow{\text{بدلاً من}}$ ٢أ

ينتج أن: جاأ = ٢جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$ ...... (٧)

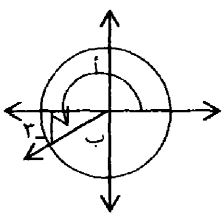
جتا٢أ = جتا^{٢}أ - جا^{٢}أ = ٢جتا^{٢}أ ـ ١ = ١ ـ ٢جا^{٢}أ — ويوضع أ $\xleftarrow{\text{بدلاً من}}$ ٢أ

ينتج أن: جتاأ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ = ٢جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ ـ ١ = ١ ـ ٢جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ ...... (٨)

ظا٢أ = $\frac{٢ظاأ}{١ ـ ظا^{٢}أ}$ — ويوضع أ ⟵ ٢أ

ينتج أن: ظاأ = $\frac{٢ظا\frac{أ}{٢}}{١ ـ ظا^{٢}\frac{أ}{٢}}$ ...... (٩)

⇦ مثال: إذا كانت جتاأ = ـ $\frac{٣}{٥}$ ، ∢أ تقع في الربع الثالث أوجد جتا٢أ ، جا٢أ ، ظا٢أ.



جتا٢أ = ٢جتا^{٢}أ ـ ١ = ٢ (ـ $\frac{٣}{٥}$)^{٢} ـ١

= ٢ ($\frac{٩}{٢٥}$) ـ ١ = $\frac{١٨}{٢٥}$ ـ ١ = $\frac{٧ـ}{٢٥}$

لكن جتا^{٢}أ + جا^{٢}أ = ١

($\frac{٣ـ}{٥}$)^{٢} + جا^{٢}أ = ١ ⟵ جا^{٢}أ = ١ ($\frac{٣ـ}{٥}$)^{٢} = ١ ـ $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

جا أ = $\frac{٤ـ}{٥}$ في الربع الثالث

جا٢أ = ٢ جاأ جتا أ = ($\frac{٤ـ}{٥}$) ($\frac{٣ـ}{٥}$) = $\frac{٢٤}{٢٥}$

ظا ٢ أ = $\frac{\frac{٢٤}{٢٥}}{\frac{٧ـ}{٢٥}}$ = $\frac{٢٤ ـ}{٧}$

⇦ مثال: دون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا15° جتا15°

نستخدم ضعف الزاوية

جا30° = جا$2 \times 15^\circ$ = 2 جا15° جتا15°

$\therefore \quad \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2}$ جا15° جتا15°

$\therefore$ جا15° جتا15° = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

وكذلك أوجد جا^2 (22,5)

نستخدم ضعف الزاوية

جتا2أ = 1 ـ 2 جا^{2}أ

وعندما أ= $22{,}5^\circ$ ⟵ 2أ = 45°

أي جتا45° = 1 ـ جا^2 22,5

جا^2 22,5 = 1 ـ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

المجموعة الرابعة:

ظهرت هذه المتطابقات كصيغٍ لاقترانات تمثل نصف الزاوية هكذا

جتا $\frac{أ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + جتاأ}{2}}$ بعد التربيع والضرب التبادلي .... (10)

ينتج أن 1+ جتاأ = 2جتا^2 $\frac{أ}{2}$

جا $\frac{أ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - جتاأ}{2}}$ بعد التربيع والضرب التبادلي .... (11)

ينتج أن 1ـ جتاأ = 2جا^2 $\frac{أ}{2}$

ظا $\frac{أ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - جتاأ}{1 + جتاأ}}$ بعد قسمة جا$\frac{أ}{2}$ على جتا $\frac{أ}{2}$

أو ظا $\frac{أ}{2} = \frac{1 - جتا أ}{جا أ} = \frac{جا أ}{1 + جتا أ}$ (دون جذور)

⇦ مثال: إذا كان جاس= $\frac{٣}{٥}$ ، ∡ س في الربع الأول أوجد جا $\frac{١}{٢}$ س

لأن جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ ⟵ $\frac{٩}{٢٥}$ + جتا^{٢}س= ١

⟵ جتا^{٢}س = $\frac{١٦}{٢٥}$ ⟵ جتاس= $\frac{٤}{٥}$

ومنها: جا $\frac{١}{٢}$ س = $\sqrt{\frac{١ - جتاس}{٢}}$ كون ∡ س تقع في الربع الأول وجميع الاقترانات موجبة

$= \sqrt{\frac{١ - \frac{٤}{٥}}{٢}} = \sqrt{\frac{\frac{١}{٥}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$

المجموعة الخامسة

ظهرت هذه المتطابقات كصيغ لاقترانات تمثل ناتج جمع أو باقي طرح اقترانين وتحويلها إلى حاصل ضرب هكذا.

جاأ + جاب = ٢ جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ .... (١٢)

جاأ ـ جاب = ٢ جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ جا $\frac{أ ـ ب}{٢}$ .... (١٣)

جتاأ + جتاب = ٢ جتا $\frac{أ + ب}{٢}$ جتا $\frac{أ ـ ب}{٢}$ .... (١٤)

جتاأ ـ جتاب = ـ٢ جا $\frac{أ + ب}{٢}$ جا $\frac{أ ـ ب}{٢}$ .... (١٤)

⇦ مثال: بين أن جا١٠٥° ـ جا١٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

البيان جا١٠٥° ـ جا١٥° = ٢جتا $\frac{١٠٥ ° + ١٥ °}{٢}$ جا $\frac{١٠٥ ° + ١٥ °}{٢}$

= ٢جتا $\frac{١٢٠ °}{٢}$ جا $\frac{٩٠ °}{٢}$

= ٢ جتا ٦٠° جا ٤٥°

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = الطرف الأيسر.

⇦ مثال: بين أن $\frac{\text{جا}٧٥^\circ + \text{جا}١٥^\circ}{\text{جتا}١٥^\circ - \text{جتا}٧٥^\circ} = \sqrt{٣}$

البيان: $\frac{\text{جا}٧٥^\circ + \text{جا}١٥^\circ}{\text{جتا}١٥^\circ - \text{جتا}٧٥^\circ} = \frac{٢ \text{ جا}\frac{٧٥^\circ + ١٥^\circ}{٢} \text{ جتا}\frac{٧٥^\circ - ١٥^\circ}{٢}}{-٢ \text{ جا}\frac{٧٥^\circ + ١٥^\circ}{٢} \text{ جا}\frac{١٥^\circ - ٧٥^\circ}{٢}} = \frac{\text{جا}٤٥^\circ \text{ جتا}٣٠^\circ}{- \text{جا}٤٥^\circ \text{ جا}(-٣٠^\circ)}$

$= \frac{\text{جتا}٣٠^\circ}{-\text{جا}(-٣٠^\circ)} = \frac{\text{جتا}٣٠^\circ}{\text{جا}٣٠^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣}$ = الأيسر

المجموعة السادسة

ظهرت هذه المتطابقات كصيغ لاقترانات تمثل حاصل ضرب اقترانين وتحويلها إلى ناتج جمع وباقي طرح اقترانين هكذا:

جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ { جا (أ + ب) + جا (أ - ب) }

جتا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ { جا (أ + ب) - جا (أ - ب) }

جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ { جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب) }

جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ { جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب) }

⇦ مثال: حول ما يأتي إلى مجموع أو فرق بين اقترانين

(١) جا ٧٠° جتا ٢٠° (٢) جتا ٥٠° جتا ٤٠° (٣) جا ٥٠° جا ٤٠°

جا ٧٠° جتا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ { جا (٧٠° + ٢٠°) + جا (٧٠° - ٢٠°) }
(المجموع) (الفرق)

= $\frac{١}{٢}$ { جا ٩٠° + جا ٥٠° } وباستخدام الآلة الحاسبة

= $\frac{١}{٢}$ { ١ + جا ٥٠° } = $\frac{١}{٢}$ { ١ + ٠,٧٦ } = × ١,٧٦ = ٠,٨٨

جتا 50° جتا 40° = $\frac{1}{2}$ {جتا ($50^\circ + 40^\circ$) + جتا ($50^\circ - 40^\circ$)} = $\frac{1}{2}$ { جتا 90° + جتا 10° }

= $\frac{1}{2}$ { صفر + ٠,٩٨ } = ٠,٤٩ من الآلة الحاسبة

جا 50° جا 40° = $\frac{1}{2}$ {جتا ($50^\circ - 40^\circ$) - جتا ($50^\circ + 40^\circ$)} = $\frac{1}{2}$ { جتا 10° - جتا 90° }

= $\frac{1}{2}$ { ٠,٩٨ - صفر } = ($\frac{1}{2}$) (٠,٩٨) = ٠,٤٩ من الآلة الحاسبة

⇦ مثال: بين أن ٢ جتا (45° + س$^\circ$) جتا (45° - س$^\circ$) = جتا ٢س

الطرف الأيمن:

= ٢ × { جتا (45° + س$^\circ$) جتا (45° - س$^\circ$)}

= ٢ × $\frac{1}{2}$ { جتا (45° + س$^\circ$ + 45° - س$^\circ$) + جتا (45° + س$^\circ$ - 45° - س$^\circ$) }

= جتا (90°) + جتا ٢س

= صفر + جتا ٢س

= صفر + جتا ٢س = الطرف الأيسر.

ملحوظة:

هناك متطابقات تتعلق بالزاوية ومتممتها كما يلي:

(١) جاس = جتا ($\frac{\pi}{2}$ - س) والتفسير: جيب أي زاوية = جيب تمام متممتها

⇦ مثال: جا 30° = جتا($90^\circ - 30^\circ$) = جتا 60° = $\frac{1}{2}$

(٢) جتاس = جا ($\frac{\pi}{2}$ - س) والتفسير: جيب تمام أي زاوية = جيب متممتها

⇦ مثال: جتا 30° = جا($90^\circ - 30^\circ$) = جا 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣) ظاس = ظتا ($\frac{\pi}{2}$ - س) والتفسير: ظل أي زاوية = ظل تمام متممتها

⇦ مثال: ظا 30° = ظتا($90^\circ - 30^\circ$) = ظتا 60° = $\frac{1}{\text{ظا } 60}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٣) ظتاس = ظا ($\frac{\pi}{2}$ - س) والتفسير: ظل تمام أي زاوية = ظل متممتها

⇦ مثال: ظتا 30° = ظا($90^\circ - 30^\circ$) = ظا 60° = $\sqrt{3}$

ويمكن استنتاج: جا ($\frac{\pi}{٢}$ ـ س) = جا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جتاس تحقق بأمثلة عددية

وكذلك: جتا ($\frac{\pi}{٢}$ ـ س) = - جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جاس تحقق بأمثلة عددية

والآن وبعد أن أوردنا المتطابقات في ست مجموعات، سنستخدمها في بيان صحة متطابقات مثلثية أخرى وحل بعض الأمثلة كما يلي:

⇦ مثال: إذا كان جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ، ∢أ ، ∢ب في الربع الأول

أوجد: جا (أ+ب)، ظا (أ+ب)

أولاً: نجد بقية الاقترانات الدائرية للزاويتين أ ، ب هكذا

جتا^{٢}أ + جا^{٢}أ = ١ (متطابقة مثلثية)

جتا^{٢}أ + ($\frac{٣}{٥}$)^٢ = ١

جتا^{٢}أ = ١ - $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

جتاأ= $\frac{٤}{٥}$ كون ∢ أ في الربع الأول (موجبة الإشارة)

وكذلك جتا^{٢}ب + جا^{٢}ب = ١ (متطابقة مثلثية)

($\frac{٥}{١٣}$)^٢+ جا^{٢}ب = ١

جا^{٢}ب = ١ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$

∴ جا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ كون ∢ ب في الربع الأول (الإشارة موجبة)

وكذلك ظا أ= $\frac{جاأ}{جتاأ}$ = $\frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٣}{٤}$

وكذلك ظا ب= $\frac{جاب}{جتاب}$ = $\frac{\frac{١٢}{١٣}}{\frac{٥}{١٣}}$ = $\frac{١٢}{٥}$

والآن:

جا (أ+ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب (متطابقة مثلثية)

$\therefore$ جا (أ+ب) = $\left(\frac{٣}{٥}\right)\left(\frac{٥}{١٣}\right) + \left(\frac{٤}{٥}\right)\left(\frac{١٢}{١٣}\right)$

$= \frac{١٥}{٦٥} + \frac{٤٨}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٥}$

ظا (أ+ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$ (متطابقة مثلثية)

$\therefore$ ظا (أ+ب) = $\frac{\frac{٣}{٤} + \frac{١٢}{٥}}{١ - \left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{١٢}{٥}\right)} = \frac{\frac{١٥ + ٤٨}{٢٠}}{١ - \frac{٣٦}{٢٠}} = \frac{\frac{٦٣}{٢٠}}{\frac{-١٦}{٢٠}}$

$= \frac{٦٣}{-١٦} = -\frac{٦٣}{١٦}$

ملحوظة: لبيان صحة المتطابقات

لكل متطابقة طرفان الأيمن والأيسر

ولبيان صحة المتطابقة نستخدم الحالات الثلاث التالية:

١. نبدأ بالطرف الأيمن ونبسطه ونجعله يساوي الطرف الأيسر.
٢. أو نبدأ بالطرف الأيسر ونبسطه ونجعله يساوي الطرف الأيمن.
٣. نأخذ الطرفين ونبسطهما ونجعل كل منهما يساوي نفس المقدار.

كما يلي:

⇦ مثال: بين أن جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$ = جتاس

الطرف الأيمن جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)$ = جا $\frac{\pi}{٢}$ جتاس - جتا $\frac{\pi}{٢}$ جاس

= (١) جتا س - (صفر) جا س = جتا س = الأيسر

⇦ مثال: بين أن ظا أ + ظا ب = $\frac{\text{جا (أ+ب)}}{\text{جتا أ جتا ب}}$

الطرف الأيسر = $\frac{\text{جا أ جتاب + جتا أ جاب}}{\text{جتا أ جتا ب}}$ بتجزيء الكسر الأيسر

= $\frac{\text{جا أ جتاب}}{\text{جتا أ جتا ب}} + \frac{\text{جتا أ جاب}}{\text{جتا أ جتا ب}}$ = ظا أ + ظا ب = الأيمن.

⇦ مثال: إذا كان جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} \leq$ هـ $< ٢\pi$

أوجد جا٢هـ، ظا $\frac{هـ}{٢}$

بما أن ∢ هـ في الربع الرابع

جا٢هـ = ٢جا هـ جتا هـ

لكن جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١

$(\frac{٤}{٥})$ + جا^{٢}هـ = ١ ← جا^{٢}هـ = ١ - $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{٩}{٢٥}$ ← جاهـ = -$\frac{٣}{٥}$ (سالب)

∴ جا٢هـ = (٢) (-$\frac{٣}{٥}$) ($\frac{٤}{٥}$) = - $\frac{٢٤}{٢٥}$

ظا $\frac{هـ}{٢}$ = $\frac{جاس}{١ + جتاس}$ = $\frac{-\frac{٣}{٥}}{١ + \frac{٤}{٥}}$ = $\frac{-\frac{٣}{٥}}{\frac{٩}{٥}}$ = $\frac{-٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

⇦ مثال: إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ دون استخدام الجداول بين أن ∢ (أ + ب) = ٩٠° على فرض أن ∢أ ، ب تقعان في الربع الأول

نبدأ بـ: جتا (أ+ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جاب

وعندما جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ فإن جا أ = $\frac{٤}{٥}$ من جتا^{٢}أ + جا^{٢}أ = ١

وعندما جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ فإن جا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا^{٢}ب + جا^{٢}ب = ١

∴ جتا (أ + ب) = ($\frac{٣}{٥}$) ($\frac{٤}{٥}$) - ($\frac{٤}{٥}$) ($\frac{٣}{٥}$) ($\frac{٤}{٥}$) = صفر

∴ ∢ (أ+ب) = ٩٠° = ما ورد بالمطلوب

⇦ مثال: دون استخدام الجداول أوجد $\frac{٢ ظا ٧٥°}{١ - ظا^٢ ٧٥}$

من ضعف الزاوية:

$$\text{ظا}\ (2 \times 75^\circ) = \frac{2\ \text{ظا}\ 75^\circ}{1 - \text{ظا}^2\ 75}$$

الطرف الأيمن = ظا ١٥٠° = ظا (١٨٠ − ٣٠)

$= \text{ظا}\ 30^\circ$ (في الربع الثاني الظل السالب) $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

⇦ مثال: أوجد جا $\frac{\pi}{8}$ جتا $\frac{\pi}{8}$

من ضعف الزاوية

$$\therefore \text{جا}\ \frac{\pi}{4} = 2\ \text{جا}\ \frac{\pi}{8}\ \text{جتا}\ \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{جا}\ \frac{\pi}{8}\ \text{جتا}\ \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(١١ − ٦) المعادلات المثلثية Trignometric Equations

المعادلة المثلثية: معادلة المتغير فيها اقتران مثلثي (دائري) أو أكثر، وحلها يُعرَّف بأنه إيجاد قيم المتغير فيها والتي تحقق تلك المعادلة أما طرق حلها فاثنتان هما الطريقة البيانية والطريقة الجبرية، سنركز في هذا المؤلف على الطرق الجبرية كونها أكثر دقة من الطرق البيانية في معظم الأحيان.

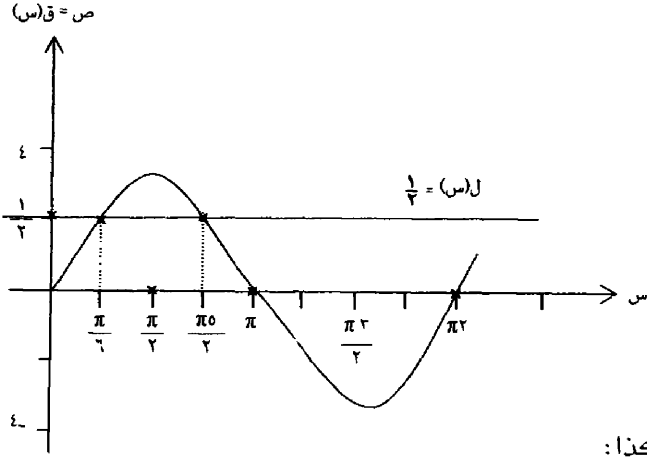
⇦ مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة المثلثية جاس = $\frac{1}{2}$ بيانياً .

بما أن الاقتران جاس= $\frac{1}{2}$ موجب الإشارة فالزاوية س تقع في الربع الأول أو الثاني فقط دون سائر الأرباع الأربعة.

لذا سنمثل ق(س) جاس في دورة واحدة فقط وفي مجال [٠ ، ٢π]

هكذا:

ثم نرسم اقترانا آخر هو ل(س) = $\frac{1}{2}$



هكذا:

فالإحداثيات السينية لنقط التقاطع أ ،ب تحددان مجموعتي الحل:

∴ ⊁ س = $\{ \frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6} \}$

مجموعة الحل = $\{ \frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6} \}$ حيث $0 \leq$ س $< 2\pi$

وهذا يسمى الحل الأولي Prime solution للمعادلة المثلثية.

ونلاحظ أن الخط المستقيم الذي يمثل الاقتران ل(س) = $\frac{1}{2}$ يقطع المنحنى ق(س) = جاس في حالة تكرار المنحنى ق (س) في عدة نقط تربطها العلاقة:

$\frac{\pi}{6} + 2$ م π، $\frac{5\pi}{6} + 2$م π لكل م ∈ ص حيث 2π تمثل دورة الاقتران

لذا مجموعة الحل = $\{ \frac{\pi}{6} + 2$ م π، $\frac{5\pi}{6} + 2$ م $\pi \}$

وهذا الحل العام Common solution للمعادلة المثلثية، لذا لكل معادلة مثلثية حلان هما:

الحل الأولي: هو قيم قياسات الزوايا التي تحقق المعادلة المثلثية في دورة

واحدة هي الدورة الأولى فقط حيث: ٠ ≤ س ≤ ٢π أي ضمن الفترة [٠ ، ٢π].

والحل العام للمتباينة المثلثية: هو قيم قياسات الزوايا التي تحقق المعادلة المثلثية إذا كان مجال الاقتران ح ونجده بإضافة المقدار (م × دورة الاقتران المثلثي) أي ٢π الاقتران الجيب وجيب التمام، π الاقتران الظل إن وجد.

سنناقش حلول المعادلة المثلثية جبرياً «باستخدام القواعد المساعدة التالية»

⇦ مثال: أوجد الحل الأولي والعام للمعادلة المثلثية

٢جا^{٢}س + جاس - ١ = صفر «بالتحليل إلى العوامل»

٢جا^{٢}س + جاس - ١ = (٢جاس - ١) (جاس + ١) = صفر

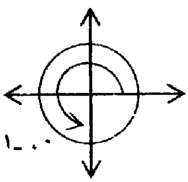
٢جاس = ١ ⟵ جاس= $\frac{١}{٢}$

فالحل الأولي: ∢ س= ٣٠° ، ١٥٠°

$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

وكذلك جاس= -١

فالحل الأولي: ∢س = $\frac{٣\pi}{٢}$



وبما أن دورة الاقتران ق(س) = جاس هو ٢π

فالحل الاولي للمعادلة= { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ }

والحل العام للمعادلة= { $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ م π ، $\frac{٥\pi}{٦}$ +٢ م π، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢م π}

حيث م ∈ ص

⇦ مثال: حل المعادلة جبرياً جاس + جتاس = ١

«بتربيع الطرفين»

(جاس + جتاس)^{٢} = (١)^{٢}

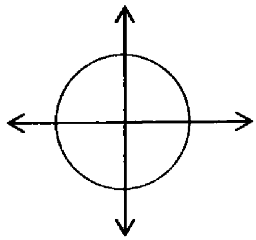
(جا^{٢}س + جتا^{٢}س) + ٢جاس جتاس = ١

لكن جا^{٢}س + جتا^{٢}س= ١ «متطابقة مثلثية»

١ + ٢جاس جتاس = ١

٢جاس جتاس = صفر

جا٢س = صفر «متطابقة مثلثية»



$\measuredangle$٢س= صفر ، $\measuredangle$ ٢س= π

∴ $\measuredangle$س= صفر ، $\frac{\pi}{٢}$ لحل الأولى

∴ الحل الأولي = { صفر، $\frac{\pi}{٢}$ }

وبما أن دورة جاس، جتاس هو ٢π

∴ الحل العام = {صفر + ٢ n π، $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ n π} $n \in$ ص

⇦ مثال: حل المعادلة قا^{٢}س − ٣ قاس=- ٢ جبرياً حيث ٠ $\leq$ س $\leq$ ٢π

بعد ترتيب المعادلة قا^{٢}س − ٣ قاس + ٢= صفر «تحليلها إلى عوامل»

(قاس − ٢) (قاس − ١) = صفر

قاس = ٢، قاس = ١

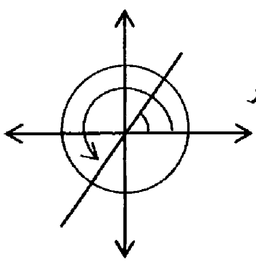
∴ $\measuredangle$ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، ٢π - $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{٥\pi}{٣}$

$\frac{١}{\text{جتاس}}$ = ١ ⟵ جتا س = ١ $\measuredangle$س = صفر، ٢π

فالحل الأولي: س = {صفر، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ، ٢π} وهو المطلوب فقث

⇦ مثال: حل المعادلة $\sqrt{٣}$ جاس - جتا س = صفر {٠ $\leq$ س $<$ ٢π}

نحول الاقتران إلى اقتران واحد هكذا:



$\frac{\sqrt{٣}\ \text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$ بالقسمة على جناس $\neq$ صفر

$\sqrt{٣}$ ظاس = ١

ظاس= $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ في الربع الأول والثالث

فالحل الأولي: ∢س= $\frac{\pi}{٦}$، $\pi + \frac{\pi}{٦} = \frac{٧\pi}{٦}$

فالحل الأولي: { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ }

والطريقة التالية لحل المعادلات المثلثية على الصورة أ جاس ± ب جتاس = جـ

كثلاث صور لكل أ، ب، جـ ∈ ح.

هناك الطريقة العامة التالية:

⇦ مثال: حل المعادلة المثلثية ٣ جاس + ٤ جتاس = ٥ ، ٠ ≤ س < π

لا يمكن تحويل الاقترانات جاس، جتاس إلى اقتران واحد هو ظاس كما في المثال السابق لوجود الحد المطلق «٥» على اليسار لذا:

نفرض أن ٣ جاس + ٤جتاس = ر جا (س + هـ) كزاوية مركبة وبعد فكها

∴ ٣ جاس + ٤جتاس = ر { جاس جتاهـ + جتاس جاهـ}

= ر جاس جتاهـ + ر جتاس جاهـ}

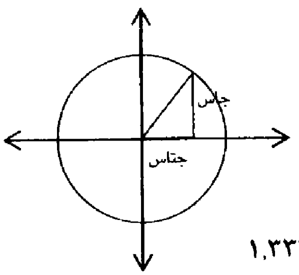
وباعتبار ∢س نفسها، ∢هـ كمعامل

∴ ٣جاس + ٤جتاس = ر جتاهـ جاس + ر جاهـ جتاس

ومن التناظر بين طرفي المعادلة فإن:

ر جتا هـ = ٣ (١)

ر جا هـ = ٤ (٢)



وبقسمة المعادلة (٢) على (١) ينتج أن

$\frac{\text{ر جاهـ}}{\text{ر جتا هـ}} = \frac{٤}{٣}$ ← ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$ = ١,٣٣٣

ومن الآلة الحاسبة ينتج أن ∢ هـ = ٥٣° تقريباً

نعود إلى ر جتا هـ = ٣، ر جا هـ = ٤ وبتربيع كل معادلة

ر^{٢} جتا^{٢} هـ = ٩، ر^{٢} جا^{٢} هـ = ١٦

أي ر^{٢} جتا^{٢} هـ + ر^{٢} جا^{٢} هـ = ٢٥

ر^{٢} (جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ) = ٢٥

لكن جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ = ١

∴ ر^{٢} = ٢٥

ر = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ الطول موجب

وإعادة التعويض بالفرض:

٣ جاس + ٤جاس = ر جا (س + هـ)

٣ جاس + ٤جاس = ٥ جا (س + ٥٣°) (٤)

لكن ٣ جاس + ٤جاس = ٥ كما ورد بالسؤال

أي أن ٥ جا (س + ٥٣°) = ٥ ⟵ ∴ جا (س + ٥٣°) = ١

∴ ∢(س + ٥٣°) = ٩٠°

∴ س + ٥٣° = ٩٠°

∢ س = ٩٠° - ٥٣° = ٣٧°

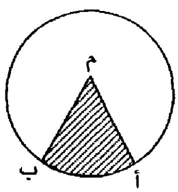
∴ الحل الأولي للمعادلة: س = {٣٧°} **الحل مطول لكنه مُفصَّل**

(٦ - ٧) تطبيقات على المثلثات:

وأخيراً لا تنس أن هناك تطبيقات للمثلثات في الهندسة المستوية، هي بإيجاز شديد:

(١) مساحة القطاع الدائري:

والقطاع الدائري جزء من سطح الدائرة محصور بين قوس (مثل $\overleftarrow{أ ب}$) ونصفي قطرين ($\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$) مارين بنهايتي ذلك القوس كما في الشكل



مساحة القطاع الدائري مباشرة= $\frac{1}{2}$ نق^{٢} هـ^{د}

حيث زاوية القطاع (زاوية مركزية في الدائرة) بالتقدير الدائري أو الراديان

⇦ مثال: احسب مساحة القطاع الدائري المرسوم في دائرة نصف قطرها ١٠سم وزاويته المركزية ٢,٥ راديان

مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times (10)^2 \times 2.5 = \frac{1}{2} \times 100 \times 2.5 = (50)\,(2.5)$

$= 125.0 = 125$ سم^2

⇦ مثال: احسب مساحة القطاع الدائري المرسوم في دائرة نصف قطرها ٢٠سم وزاويته المركزية = ٦٠°

نحول ٦٠° إلى الراديان فنقول $\frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3}$

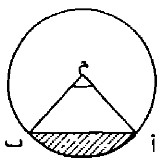
مساحة القطاع = $(\frac{1}{2}) \times (20)^2 \times (\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \times 400 \times \frac{\pi}{3}$

$= \frac{200\pi}{3} = 209$ سم^2 تقريباً

كون $\pi = 3.14$

(٢) مساحة القطعة الدائرية

والقطعة الدائرية جزء من سطح دائرة محصور بين قوس ووتر مار بنهايتي ذلك القوس كما في الشكل



مساحة القطعة الدائرية مباشرة = $\frac{1}{2}$ نق٢ (هـ^{ء} - جاهـ)، ∢هـ بالتقدير الدائري

⇦ مثال: احسب مساحة القطعة الدائرية المرسومة في دائرة نصف قطرها ٤٠سم وزاويتها المركزية تساوي $\frac{\pi}{3}$

المساحة = $\frac{1}{2}(40)^2\left(\frac{\pi}{3} - \text{جا}\,\frac{\pi}{3}\right)$

$= (\frac{1}{2})(40)(40)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 800\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ سم^2

⇦ مثال: احسب مساحة القطعة الدائرية المرسومة في دائرة نصف قطرها ٥سم وزاويتها المركزية ٢١٠°

نحول ٢١٠° إلى راديان: $\frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢}(٥)^{٢}\left(\frac{٧\pi}{٦} - \text{جا}\ \frac{٧\pi}{٦}\right)$$

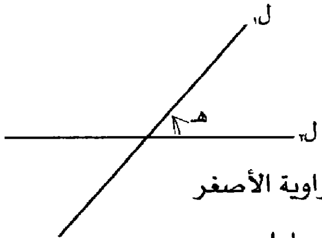
$$= \left(\frac{١}{٢}\right)(٢٥)\left(\frac{٧\pi}{٦} - (-\text{جا}\ \frac{\pi}{٦})\right)$$

$$= \left(\frac{٢٥}{٢}\right)\left(\frac{٧\pi}{٦} + \text{جا}\ \frac{\pi}{٦}\right)$$

$$= \left(\frac{٢٥}{٢}\right)\left(\frac{٧\pi}{٦} + \frac{١}{٢}\right)\text{سم}^{٢}$$

وكذلك هناك تطبيق للمثلثات في الهندسة التحليلية وهو إيجاد الزاوية المحصورة بين مستقيمين هكذا

⇦ مثال: احسب قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم $ل_١$ ، $ل_٢$



حيث معادلة $ل_١$ هي: ص − ٢س = ٢

ومعادلة $ل_٢$ هي: ٢ص + ٥س = ١٧

والعلاقة مباشرة:

$\text{ظا هـ} = \left|\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}\right|$ لإيجاد الزاوية الحادة، والزاوية الأصغر

وبما أن $م_١$: ص = ٢س + ٢ ⟵ $م_١$ = ② معامل س

$م_٢$: ٢ص = −٥ س + ١٧

$$\text{ص} = -\frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{١٧}{٢} \longrightarrow م_٢ = -\frac{٥}{٢}\ \text{معامل س}$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = \left|\frac{-\frac{٥}{٢} - ٢}{١ + \left(\frac{-٥}{٢}\right)(٢)}\right| = \frac{-\frac{٩}{٢}}{١ - ٥} = \left|\frac{-\frac{٩}{٢}}{-\frac{٤}{١}}\right| = \left(-\frac{٩}{٢}\right)\left(-\frac{١}{٤}\right)$$

$$= \left|\frac{٩}{٨}\right| = ١,١٢٥$$

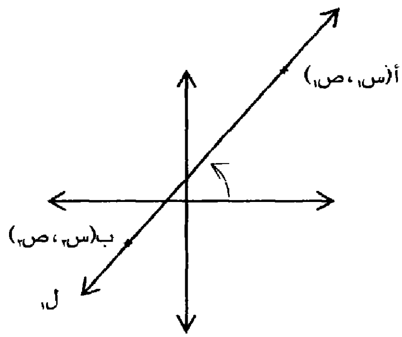
∴ ∡ هـ = ٤٨° كزاوية حادة، الصغرى

أو ∡ هـ = $١٨٠^{\circ} - ٤٨^{\circ} = ١٣٢^{\circ}$ وهكذا زاوية منفرجة، الكبرى

وللمثلثات تطبيق آخر في الهندسة التحليلية وفي إيجاد الميل للمستقيم بالذات هكذا:

عندما تمثل المعادلة الخطية بمتغيرين في المستوى الديكارتي فإنها تمثل بخط مستقيم ومن هنا جاء اسمها (خطية) كون منحناها في المستوى الديكارتي يمثل خط مستقيم كما في الشكل:

وجميع المستقيمات تقطع محور السينات إلا المستقيمات الموازية له.



لذا لكل مستقيم يقع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ∢ هـ الموجبة حيث اتجاهها ضد عقارب الساعة.

ولإيجاد ميل المستقيم ل١ فإننا نستخدم قاعدة من القواعد التالية:

(١) $م_{ل١} = \frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السينين}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

(٢) $م_{ل١}$ = معامل س عندما نضع المعادلة أس + ب ص + جـ = صفر

بالصورة ص = م س + جـ

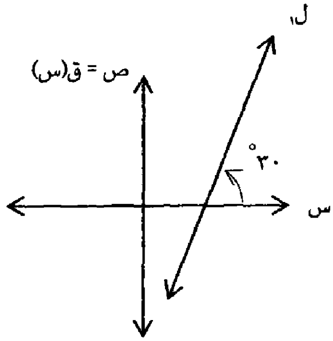
(٣) وأما القاعدة التالية فتأتي من المثلثات هكذا:

$م_{ل١}$ = ظاهـ، حيث ∢ هـ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

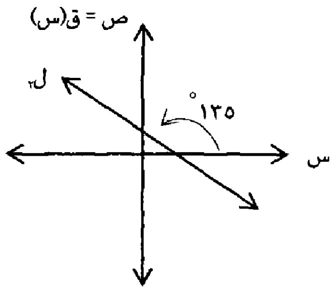
⇦ مثال: أوجد ميل المستقيم ل١ الذي يصنع زاوية مقدارها:

(١) ٣٠°

(٢) ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات



$م_{\overleftrightarrow{ل_1}}$ = ظا٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وهو موجب كونها حادة (الزاوية).



$م_{\overleftrightarrow{ل_2}}$ = ظا١٣٥° = ظا (١٨٠° ـ ٤٥°) = ـ ظا ٤٥° = − ١

وهو سالب كونها منفرجة (الزاوية).

(١١ ـ ٨) أمثلة محلولة على المثلثات

⇦ مثال(١): أوجد الاقترانات الدائرية للزاوية هـ التي قياسها (١) ٣٣٠° (٢) $-\frac{٣}{٤}\pi$

بما أن $٢٧٠^\circ < ٣٣٠^\circ < ٣٦٠^\circ$

فإن ∢ هـ تقع في الربع الرابع كما في الشكل

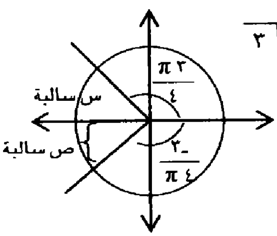
فهي مرتبطة بالزاوية

$٣٦٠^\circ - ٣٣٠^\circ = ٣٠^\circ$ الحادة

ومنها: $\text{جا } ٣٣٠^\circ = \text{جا } (٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ) = -\text{جا } ٣٠^\circ = -\frac{١}{٢}$

$\text{جتا } ٣٣٠^\circ = \text{جتا } (٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ) = \text{جتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{ظا } ٣٣٠^\circ = \text{ظا } (٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ) = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$



$\text{ظتا } ٣٣٠^\circ = \frac{\text{جتا} ٣٦٠^\circ}{\text{جا} ٣٣٠^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{-\frac{١}{٢}} = -\sqrt{٣}$

$\text{قتا } ٣٣٠^\circ = \frac{١}{\text{جا} ٣٣٠^\circ} = \frac{١}{-\frac{١}{٢}} = -٢$

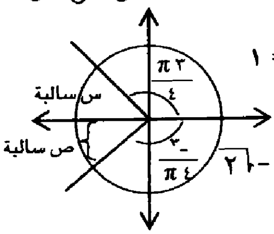
$\text{قا } ٣٣٠^\circ = \frac{١}{\text{جتا} ٣٣٠^\circ} = \frac{١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٢) $-\frac{٣}{٤}\pi$

$\text{جا } (-\frac{٣\pi}{٤}) = -\text{جا } \frac{٣\pi}{٤} = -\{\text{جا } (\pi - \frac{\pi}{٤})\} = -\{\text{جا } \frac{\pi}{٤}\} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{جتا } (-\frac{٣\pi}{٤}) = \text{جتا } \frac{٣\pi}{٤} = \text{جتا } (\pi - \frac{\pi}{٤}) = -\text{جتا } \frac{\pi}{٤} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{ظا } (-\frac{٣\pi}{٤}) = \frac{\text{جا } (-\frac{٣}{٤}\pi)}{\text{حتا } (-\frac{٣}{٤}\pi)} = \frac{-\frac{١}{\sqrt{٢}}}{-\frac{١}{\sqrt{٢}}} = ١$

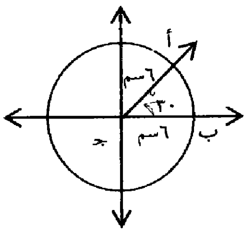


$$\text{ظتا}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\text{جتا}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}{\text{حا}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\text{قا}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\text{جتا}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{قتا}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\text{حا}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

⇦ مثال(٢): ما طول القوس المقابل للزاوية المركزية قياسها 30° في دائرة نصف قطرها ٦سم.



نحول 30° إلى الراديان

$360^\circ \longrightarrow 2\pi$

$30^\circ \longrightarrow$ س

$$\text{س} = \frac{30 \times 2\pi}{360} = \frac{\pi}{6}$$

بما أن ل = نق × هـ^{د} ⟵ ل = ٦ × $\frac{\pi}{6}$ = π سم = ٣,١٤ سم. طول القوس

⇦ مثال(٣): بين صحة المتطابقات التالية:

(١) $\frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جاس}}$ = قاس + ظاس

(٢) ظا^{2}س جا^{2}س = ظا^{2}س - جا^{2}س

الحل:

أولاً: $\frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جاس}}$ = قاس + ظاس

البيان: الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتا س}}{1 - \text{جاس}} \times \frac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}}$ انطباق المقام

حيث ١ + جاس هو

مرافق ١ - جاس

$= \frac{\text{جتا س}\,(1 + \text{جاس})}{1 - \text{جا}^2\text{س}} = \frac{\text{جتا س}\,(1 + \text{جاس})}{\text{جتا}^2\text{س}}$ حيث جا^{2}س + جتا^{2}س = ١

∴ جتا^{2}س = ١ - جا^{2}س

$= \frac{1 + \text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{1}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ (تجزي الكسر)

= قاس + ظاس = الطرف الأيسر.

ثانياً: ظا^{2}س جا^{2}س = ظا^{2}س - جا^{2}س

البيان: الطرف الأيسر = ظا^{2}س - جا^{2}س = $\left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)^2$ - جا^{2}س

$= \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1} = \frac{\text{جا}^2\text{س - جا}^2\text{س جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{جا}^2\text{س (1 - جتا}^2\text{س)}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{(\text{جا}^2\text{س})(\text{جا}^2\text{س})}{\text{جتا}^2\text{س}}$ حيث جا^{2}س + جتا^{2}س = ١ ∴ جا^{2}س = ١ - جتا^{2}س

$= \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1}$ = ظا^2 جا^{2}س = الطرف الأيمن.

⇦ مثال(٤): أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات المثلثية التالية

(١) ٢جا^{2}س + جاس - ١ = صفر في الفترة [٠ ، ٢π]

نُحلل الطرف الأيمن هكذا:

(٢جاس - ١) (جاس + ١) = صفر

٢جاس = ١ ، جاس =- ١

٢جاس = ١ والجيب موجب في الربع الأول والثاني

∴ ٢جاس = $\frac{1}{2}$

∴ ∡ س = ٣٠° ، ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

جاس = - ١ الجيب - ١ للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ = ٢١٠°

∴ مجوعة الحل الأولي = { ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٧٠° } الحل الأولي كونه في الفترة [٠ ، ٢π] فقط

(٢) جتاس - جا٢س = صفر في ح

بما أن جا٢س = ٢جاس جتاس

فإن جتاس - ٢جاس جتاس= صفر

جتاس (١- ٢جاس) = صفر

∴ جتاس= صفر ∴ ∡ = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

١ـ ٢جاس= صفر ⟵ = $\frac{١}{٢}$

∡ س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

الحل الأولي: { $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ }

الحل العام:

{ $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ م π ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ م π ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ +٢ م π

، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ +٢ م π }

حيث ٢ م π عدد من الدورات الكاملة

(٣) ظا٢س = ظاس في الفترة [٠ ، π]

بما أن ظا٢س = $\frac{٢ \text{ ظاس}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

∴ $\frac{٢ \text{ ظاس}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$ = $\frac{\text{ظاس}}{١}$ بالضرب التبادلي

ظاس (١ + ظا^{٢}س) = ٢ظاس

ظاس (١ + ظا^{٢}س) ـ ٢ظاس = صفر

ظاس (١ + ظا^{٢}س ـ ٢) = صفر

ظاس (ظا^{٢}س ـ ١) = صفر

ظاس(ظاس + ١) (ظاس ـ ١) = صفر

∴ ظاس= صفر ∴ ∡ س = صفر ، π

ظاس= ١ ، ∡ س = $\frac{\pi}{٤}$ فقط

ظاس= ـ ١ ، ∡ س = $\frac{٣\pi}{٤}$

∴ الحل = {صفر، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ، π} هذا إلى كونه في [٠ ، π] فقط.

⇦ مثال(٥): أوجد القياس الدائري بالراديان لكل من الزوايا التالية:

(١) زاوية قياسها ٢٢٥°

(٢) زاوية قياسها ـ ١٢٠°

الحل: (١) ٣٦٠° ⟵ ٢π ء (الدورة الكاملة ≠ محيط الدائرة الوحدة)

٢٥٠° ⟵ س ء وبالضرب التبادلي

٣٦٠ × س = ٢٢٥ × ٢π

∴ س = $\frac{\text{٢٢٥} \times \text{٢}\pi}{\text{٣٦٠}}$ = $\frac{\text{٥}\pi}{\text{٤}}$ راديان

(٢) ٣٦٠° ⟵ ٢π ء (الدورة الكاملة ≠ محيط الدائرة الوحدة)

ـ١٢٠° ⟵ س ء وبالضرب التبادلي

٣٦٠ × س = ـ ١٢٠ × ٢π

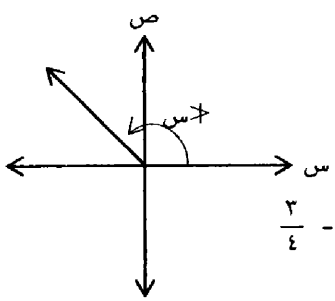
∴ س = $\frac{-\text{١٢٠} \times \text{٢}\pi}{\text{٣٦٠}}$ = $\frac{-\text{٢}\pi}{\text{٣}}$ راديان

وأنت تلاحظ ان القياس الدائري لزاوية موجبة يبقى قياساً موجباً والقياس الدائري لزاوية سالبة يبقى سالباً، فالتحويل من قياس لآخر لا يؤثر بإشارة الزاوية، موجبة كانت ام سالبة.

⇦ مثال(٦): إذا كان جاس = $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ ، جتاس= ـ $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

أو بقية الاقترانات الدائرية للزاوية ∡ س.

بما أن الجيب موجب وجيب التمام سالب فالزاوية س بوضعها القياسي تقع في الربع الثاني (ضلعها النهائي)



«جاس ومقلوبه قتاس موجبان فقط»

∴ ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{\frac{\text{٤}}{\text{٥}}}{-\frac{\text{٣}}{\text{٥}}}$ = ـ $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

وكذلك ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = $\frac{-\frac{\text{٣}}{\text{٥}}}{\frac{\text{٤}}{\text{٥}}}$ = ـ $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

وكذلك قاس = $\frac{\text{١}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{\text{١}}{-\frac{\text{٣}}{\text{٥}}}$ = ـ $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

وكذلك قتاس = $\frac{\text{١}}{\text{جاس}}$ = $\frac{\text{١}}{\frac{\text{٤}}{\text{٥}}}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

⇦ مثال(٧): باستخدام المتطابقات المثلثية أوجد قيمة

(١) جا $\frac{٧\pi}{١٢}$ من أجل السهولة فقط نحول $\frac{٧\pi}{١٢}$ إلى درجات هكذا

$$\frac{٧\pi}{١٢} = \frac{٧ \times ١٨٠}{١٢} = ١٠٥^\circ$$

ثم نضع ١٠٥° بصورة مجموع زاويتين مشهورتين أو بصورة فرق بينهما هكذا

جا ١٠٥° = جا (٤٥° + ٦٠°)= جا٤٥ جتا٦٠ + جتا٤٥ جا٦٠

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١+\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

∴ جا $\frac{٧\pi}{١٢} = \frac{١+\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$

(٢) جتا $\frac{\pi}{١٢}$

وبأسلوب مماثل فإن جتا $\frac{\pi}{١٢}$ = جتا $\frac{١٨٠}{١٢}$ = جتا ١٥°

∴ جتا ١٥ = جتا (٤٥ - ٣٠) = جتا ٤٥ جتا ٣٠ + جا ٤٥ جا٣٠

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$$

∴ جتا $\frac{\pi}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$

(٣) ظا $\frac{٥\pi}{١٢}$

وبأسلوب مماثل فإن ظا $\frac{٥\pi}{١٢}$ = ظا $\frac{٥ \times ١٨٠}{١٢}$ = ظا ٧٥°

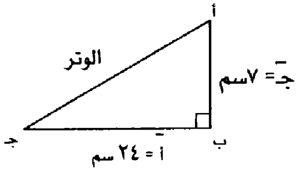
ظا ٧٥= ظا (٤٥+ ٣٠) = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٣٠}}{\text{١ - ظا ٤٥ ظا ٣٠}} = \frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - (١)\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{٣}+١}{\sqrt{٣}}}{١-\sqrt{٣}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}+١}{\sqrt{٣}}}{\frac{\sqrt{٣}-١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣}+١}{\sqrt{٣}-١}$$

⇦ مثال(٨): أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم أوجد

(١) مساحته (٢) طول محيطه (٣) جا أ ، جتا ب، ظا جـ

الحل:



مساحته = $\frac{1}{2}$ أَ ، جَ جا ب

= ($\frac{1}{2}$) (٧) (٢٤) جا ٩٠°

= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ٢٤ × ١ = ٨٤ سم^{2}

طول محيطه = مجموع أضلاعه، لذا يجب إيجاد طول أ جـ هكذا

(أ جـ)^{2} = (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2} «نظرية فيثاغورس»

= (٧)^{2} + (٢٤)^{2}

= ٤٩ + ٥٧٦

= ٦٢٥

∴ أ جـ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم ⟵ بَ = ٢٥ سم.

طول محيطه = أَ + بَ + جَ = ٢٤ + ٢٥ + ٧ = ٥٦ سم.

جا أ = $\frac{\text{أَ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

جتا جـ = $\frac{\text{أَ}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

ومنها جا أ = جتا جـ كون ∢ أ، ∢ جـ متتامتان

ظا هـ = $\frac{\text{جَ}}{\text{أَ}}$ = $\frac{٧}{٢٤}$

⇦ مثال(٩): إذا كان جا هـ = $\frac{٨}{١٧}$ وكانت ٠ > هـ > ٩٠

أوجد القيمة العددية للاقتران ق (س) = $\frac{\text{جتا}^{2}\text{ هـ جا هـ + جا}^{2}\text{هـ}}{\text{جتا}^{2}\text{هـ + جتاهـ جا}^{2}\text{هـ}}$

نبسط الاقتران هكذا ق(س) = $\frac{\text{جا هـ (جتا}^{2}\text{ هـ + جا}^{2}\text{هـ)}}{\text{جتاهـ (جتا}^{2}\text{هـ + جا}^{2}\text{هـ)}}$ (تحليل إلى العوامل)

$= \frac{\text{جا هـ } (1)}{\text{جتاهـ } (1)}$ كون (جتا^2 هـ + جا^{2}هـ = ١)

= ظاهـ

وبما أن جا هـ = $\frac{٨}{١٧}$ ومنها نجد جتا هـ هكذا:

جتا^2 هـ + جا^{2}هـ = ١

$(\frac{٨}{١٧})^2$ هـ + جا^{2}هـ = ١

جا^{2}هـ = ١ - $\frac{٦٤}{٢٨٩} = \frac{٢٢٥}{٢٨٩}$

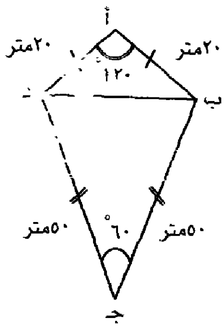
∴ جتاهـ = $\sqrt{\frac{٢٢٥}{٢٨٩}} = \frac{١٥}{١٧}$ (٠ < هـ < ٩٠°) (الاقترانات الدائرية لها موجبة)

∴ ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{\frac{٨}{١٥}}{\frac{١٥}{١٧}} = \frac{٨}{١٥}$

∴ القيمة العددية للاقتران ق(س) هي $\frac{٨}{١٥}$ بعد التبسيط

⇦ مثال(١٠): قطعة أرض كما في الشكل احسب مساحتها بالأمتار المربعة

الحل:



نجزئ القطعة إلى مثلثين بوصل د ب

مساحة القطعة = مساحة المثلث أ ب د + مساحة

المثلث أ ب د هكذا:

مساحة أ ب د = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ د × جا أ

= $(\frac{١}{٢})$ (٢٠) (٢٠) × جا ١٢٠°

لكن جا ١٢٠ = جا (١٨٠ - ٦٠) = جا ٦٠

∴ مساحة أ ب د = $(\frac{١}{٢})$ (٢٠) (٢٠) × جا ٦٠° = (١٠) (٢٠) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ١٠٠$\sqrt{٣}$ = ١٠٠ (١,٧) = ١٧٠ م^2

مساحة جـ ب د= $(\frac{١}{٢})$ (٥٠) (٥٠) × جا ٦٠°

$= (٢٥)\,(٥٠)\,\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$= (٢٥)\,(٢٥)\,(\sqrt{٣})$

$= (٦٢٥)\,(١,٧) = ١٠٦٢,٥$ م^{٢}

∴ مساحة قطعة الأرض = ١٧٠ + ١٠٦٢,٥

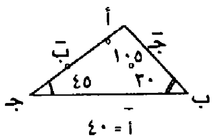
= ١٢٣٢,٥م^{٢}

⇦ مثال(١١): أ ب جـ مثلث فيه $\bar{\text{أ}}$ = ٤٠ سم، ∢ ب = ٣٠°، ∢ جـ = ٤٥°

احسب أطوال الأضلاع $\bar{\text{ب}}$ ، $\bar{\text{ج}}$.

الحل:

∢أ = ١٨٠° - (٣٠ + ٤٥) = ١٨٠° - ٧٥ = ١٠٥°



بما أن $\frac{\bar{\text{أ}}}{\text{جا أ}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا ب}} = \frac{\bar{\text{ج}}}{\text{جا جـ}}$ (قانون الجيوب)

فإن $\frac{٤٠}{\text{جا } ١٠٥^\circ} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\bar{\text{ج}}}{\text{جا } ٤٥^\circ}$

لكن جا ١٠٥° = جا(١٨٠ - ٧٥) = جا ٧٥° = ٠,٩٦

وكذلك جا ٣٠° = ٠,٥

وكذلك جا ٤٥° = ٠,٧

∴ $\frac{٤٠}{٠,٩٦} = \frac{\bar{\text{ب}}}{٠,٥} = \frac{\bar{\text{ج}}}{٠,٧}$

ومنه $\frac{٤٠}{٠,٩٦} = \frac{\bar{\text{ب}}}{٠,٥}$ وكذلك $\frac{٤٠}{٠,٩٦} = \frac{\bar{\text{ج}}}{٠,٧}$

∴ $\bar{\text{ب}} = \frac{٤٠٠ \times ٠,٥}{٠,٩٦}$ = ٢٠ سم ∴ $\bar{\text{ج}} = \frac{٤٠٠ \times ٠,٧}{٠,٩٦}$ = ٢٨ سم

فأضلاع المثلث أ ب جـ هي كما يلي

$\bar{أ}$ = ٤٠ سم

$\bar{ب}$ = ٢٠ سم

$\bar{ج}$ = ٢٨ سم

⇦ مثال(١٢): إذا كان ظاهـ = - ٢، حيث ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

أوجد كل من جاهـ، جتاهـ

بما أن الزاوية في الربع الرابع فإن جتاهـ موجب، جاهـ سالب

والحل:

ظاهـ = - ٢ ⟵(١) فإن $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{-٢}{١}$ ، أي أن جاهـ = - ٢ جتاهـ

لكن جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ (٢)

أي أن جاهـ = - ٢ جتاهـ (١)

وحل المعادليتن بالتعويض:

(- ٢ جتاهـ)^{٢} + جتا^{٢}هـ = ١

٤ جتا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١

٥ جتا^{٢}هـ = ١

جتا^{٢}هـ = $\frac{١}{٥}$

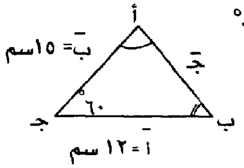
جتاهـ = + $\sqrt{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$ (في الربع الرابع جتاهـ موجب)

لكن جاهـ = - ٢ جتاهـ

= (- ٢) ($\frac{١}{\sqrt{٥}}$) = $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (في الربع الرابع جاهـ سالب)

⇦ مثال(١٣): حل المثلث أ ب جـ الذي فيه $\bar{أ}$ = ١٢سم، $\bar{ب}$ = ١٥ سم، ∢ جـ = ٦٠° لإيجاد $\bar{ج}$ نستخدم قانون جيب التمام:

$\bar{ج}^{٢} = \bar{أ}^{٢} + \bar{ب}^{٢} - ٢\ \bar{أ}\ \bar{ب}$ جتاجـ (قانون جيب التمام)



∴ $\bar{ج}^{٢} = (١٢)^{٢} + (١٥)^{٢} - (٢)(١٢)(١٥)$ جتا ٦٠°

$= ١٤٤ + ٢٢٥ - ٢ \times ١٢ \times ١٥ \times \frac{١}{٢}$

$\bar{ج}^{٢} = ٣٦٩ - ١٨٠$

$\bar{ج}^{٢} = ١٨٩$

∴ جـ = $\sqrt{١٨٩}$ = ١٣٫٥ سم تقريباً

ولإيجاد ∢ أ، نستخدم قانون الجيوب

$\frac{\bar{أ}}{جا\ أ} = \frac{\bar{ب}}{جا\ ب} = \frac{\bar{ج}}{جا\ جـ}$

$\frac{١٢}{جا\ أ} = \frac{١٥}{جا\ ب} = \frac{١٣٫٥}{جا\ ٦٠°}$

∴ $\frac{١٢}{جا\ أ} = \frac{١٣٥}{٠٨٦}$

∴ جا أ = $\frac{١٢ \times ٠٨٦}{١٣٥}$ = ٠٫٧٦

∴ ∢ أ = ٥٠°

ولإيجاد الزاوية ∢ ب نقول

∢ ب = ١٨٠° - (∢أ + ∢جـ) (قياسات زوايا المثلث ١٨٠°)

∢ ب = ١٨٠° - (٥٠ + ٦٠)

= ١٨٠° - ١١٠ = ٧٠°

وزوايا المثلث: وآضلاعه:

∢ أ = ٥٠°	أ̄ = ١٢سم
∢ ب = ٦٠°	ب̄ = ١٥سم
∢ جـ = ٧٠°	ج̄ = ١٣٫٥سم

⇦ مثال(١٤): دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة ما قيمة

(١) جا ١٣٥° جا ١٥°

(٢) جتا ٤٥° جتا ١٥°

الحل:

لإيجاد جا ١٣٥° جا ١٥° نستخدم القانون

جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ {جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)}

∴ جا ١٣٥° جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ {جتا (١٣٥° - ١٥°) - جتا (١٣٥° + ١٥°)}

= $\frac{١}{٢}$ {جتا (١٢٠°) - جتا (١٥٠°)}

لكن جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠ - ٦٠) = - جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

وكذلك جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠ - ٣٠) = - جتا ٣٠° = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ١٣٥° جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ {- $\frac{١}{٢}$ - (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)}

= $\frac{١}{٢}$ {- $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$} = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٤}$

وبأسلوب مماثل ينتج أن جتا ٤٥ جتا ١٥

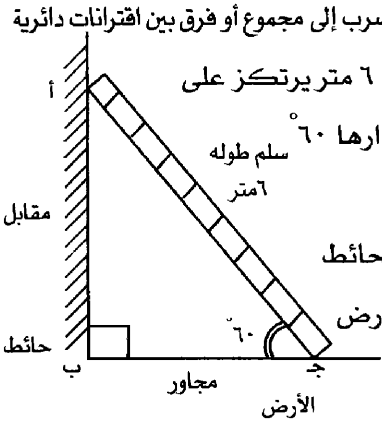
= $\frac{١}{٢}$ {جتا (٤٥ + ١٥) + جتا (٤٥ - ١٥) = $\frac{١ + \sqrt{٣}}{٤}$

هذا المثال تطبيق مباشر على تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو فرق بين اقترانات دائرية

⇦ مثال(١٥): يُبين الشكل سُلّم طوله ٦ متر يرتكز على حائط فإذا كان سلم يصنع زاوية مقدارها ٦٠° مع الأرض أوجد:

(١) كم متراً تبعد قاعدة السلم عن الحائط

(٢) كم متراً يرتفع رأس السلم عن الأرض



الحل:

أ ب جـ مثلث قائم الزتوية:

أ ب مقابل، ب جـ مجاور للزاوية ٦٠°

جتا ٦٠° = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{٦}$

∴ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{٦}$

∴ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ = ٣ متر فبعد قاعدته عن الحائط (ب جـ)

جا ٦٠° = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{٦}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\text{أ ب}}{٦}$

∴ أ ب = $\frac{٦ \times \sqrt{٣}}{٢}$ = $٣\sqrt{٣}$ = ٣ (١,٧) = ٥,١ متراً

ارتفاع رأس السلم عن الأرض (أ ب)

⇦ مثال(١٦): ما قياس الزاوية س إذا كان جا س = جتا $\frac{١}{٢}$ س

بحيث ٠ < س < ٩٠°

الحل: نحول الجيب إلى جيب التمام أو العكس هكذا:

جا س = جتا (٩٠ – س) {جيب أي زاوية = جيب تمام المتممة}

∴ جتا (٩٠ – س) = جتا $\frac{١}{٢}$ س

∴ $\frac{١}{٢}$ س = ٩٠ - س

∴ $\frac{١}{٢}$ س × س = ٩٠

∴ $\frac{٣}{٢}$ س = ٩٠

∴ $س = \frac{٢ \times ٩٠}{٣} = ٦٠^\circ$

∴ $\nless$ س = ٦٠°

⇦ مثال(١٧): حل المعادلة $\sqrt{٣}$ جاس - ١جتاس = ١، ٠ ≤ س < ٢π

لا يمكن التخلص من أحد الاقترانين كون الطرف الأيسر عدد حقيقي ليس صفر

لذلك نفرض أن:

$\sqrt{٣}$ جاس - ١جتاس = ر جا (س - هـ)   (حيث هـ، ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$)

ولإيجاد $\nless$ هـ، ر نقول

$\sqrt{٣}$ جاس - ١جتاس = ر جاس جتاهـ - ر جتاس جاهـ

= (ر جتاهـ) جاس - (ر جاهـ) جتاس

∴ ر جتاهـ = $\sqrt{٣}$ ⟵ (١)

وكذلك ر جاهـ =١ ⟵ (٢) بقسمة (٢) على (١)

∴ $\frac{ر جاهـ}{ر جتاهـ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⟵ ظاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ر $\nless$ هـ = ٣٠°

لكن ($\sqrt{٣}$ = ر جتاهـ)^٢ ⟵ ٣ = ر^{٢}جتا^{٢}هـ

وكذلك (١= ر جاهـ)^٢ ⟵ ١ = ر^{٢}جا^{٢}هـ

∴ ر^{٢}جتا^{٢}هـ + ر^{٢}جا^{٢}هـ= ٤

∴ ر^٢ (جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ) = ٤ ⟵ ر^٢ (١) = ٤ ⟵ ر^٢= ٤

∴ ر = $\sqrt{٤}$ = ٢   (س دائماً موجب)

ومنه نستخدم $\sqrt{٣}$ جاس - ١جتاس = ر (جا (س - هـ)) = ١

∴ $\sqrt{٣}$ جاس - ١جتاس = ٢ (جا (س - ٣٠°)) = ١

∴ ٢ (جا (س - ٣٠°)) = ١

∴ جا (س - ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ والجيب موجب في الربع الأول والثاني

∴ ∢(س - ٣٠°) = ٣٠° ، ∢(س - ٣٠°) = ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

∴ ∢ س = ٣٠° + ٣٠° ، ∢ س = ١٥٠° + ٣٠°

∢ س = ٦٠° ، ∢ س = ١٨٠°

∴ مجموعة الحل = { ٦٠° ، ١٨٠° } أو { $\frac{\pi}{٣}$ ، π }

⇦ مثال(١٨): أجب عما يلي وبإيجاز شديد:

(١) ما سعة الاقتران ق(س) = -٣ جا(س - $\frac{\pi}{٢}$)؟

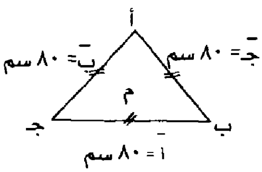
سعة الاقتران = | معامل الاقتران |

= |-٣| = ٣

(٢) ما دورة الاقتران ق(س) = ٥ جتا ($\frac{١}{٢}$ س + π)؟

دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|\text{معامل الاقتران}|}$ = $\frac{٢\pi}{|\frac{١}{٢}|}$ = $\frac{٢\pi}{\frac{١}{٢}}$ = ٤π

⇦ مثال(١٩): لافتة مرور على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٨٠سم احسب مساحتها بالأمتار المربعة.



مساحة المثلث = $\sqrt{\text{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - ج)}}$

لكن ح = $\frac{\text{أ + ب + ج}}{٢}$ = $\frac{٨٠ + ٨٠ + ٨٠}{٢}$ = ١٢٠سم.

مساحة المثلث = $\sqrt{\text{١٢٠ (١٢٠ - ٨٠) (١٢٠ - ٨٠) (١٢٠ - ٨٠)}}$

$= \sqrt{١٢٠ \times ٤٠ \times ٤٠ \times ٤٠}$

$= \sqrt{٤٠ \times ٣ \times ٤٠ \times ٤٠ \times ٤٠}$

$= ٤٠ \times ٤٠ \times \sqrt{٣} = ١٦٠٠\sqrt{٣}$ سم^{٢}

لكن المتر المربع = ١٠٠ × ١٠٠ = ١٠٠٠٠سم^{٢}

مساحة الشاخصة = $\frac{١٦٠٠\sqrt{٣}}{١٠٠٠}$ م^{٢}

وعندما $\sqrt{٣}$ = ١,٧

∴ مساحة الشاخصة = $\frac{١٦ \times ١,٧}{١٠٠٠}$ = ٠,٢٧٢ م^{٢}

هذا ويمكن إيجاد المساحة بالقانون

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × أ × ب × جاهـ

= $(\frac{١}{٢})$ (٨٠) (٨٠) جا ٦٠°

(متطابقة الأضلاع كل زاوية من زواياه قياسها ٦٠°)

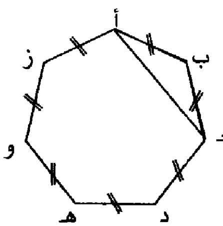
= (٤٠) (٨٠) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = (٤٠) (٤٠) $\sqrt{٣}$ = $١٦٠٠\sqrt{٣}$ سم^{٢}

⇦ مثال(١٣): من المعروف أن قطعة النقد الأردني المعدنية من فئة نصف الدينار تتخذ شكل السباعي المنتظم وطول ضلع ١,٤ سم

فإذا كانت أ ، ب، جـ ثلاثة رؤوس متتالية لهذه القطعة المعدنية أوجد

(١) مساحة المثلث أ ب جـ

(٢) طول القطعة المستقيمة أ جـ



الحل: نجد كل زاوية داخلة للشكل السباعي:

عدد المثلثات = عدد - ٢

= ٧ - ٢ = ٥ مثلثات

مجموع قياسات الزوايا = ٥ (١٨٠) = ٩٠٠°

وقياس كل زاوية داخلة = $\frac{٩٠٠}{٧}$ = ١٢٨° تقريباً

مساحة المثلث أ ب جـ = ($\frac{١}{٢}$) (١,٤) (١,٤) × جا ١٢٨°

لكن جا ١٢٨° = جا (١٨٠ – ١٢٨) = جا ٥٢° = ٠,٧٨ تقريباً

∴ مساحة المثلث أ ب جـ = ($\frac{١}{٢}$) (١,٤) (١,٤) (٠,٧٨)

= (٠,٩٨) (٠,٧٨) = ٠,٧٦٤٤ سم^{٢}

ولإيجاد طول أ جـ نقول

(أ جـ)^{٢} = (١,٤)^{٢} + (١,٤)^{٢} - ٢ × (١,٤) (١,٤) جتا ١٢٨° (قانون جيب لتمام)

= ١,٩٦ + ١,٩٦ – (٠,٧) (١,٤) (- جتا٥٢)

= ٣,٩٢ – (٠,٧) (١,٤) (-٠,٦١)

= ٣,٩٢ + (٠,٧) (١,٤) (٠,٦١)

(أ جـ)^{٢} = ٣,٩٣ + ٠,٥٩٧٨ = ٤,٥٢٧٨

∴ أ جـ = $\sqrt{٤,٥٢٧٨}$ = ٢,٢ سم

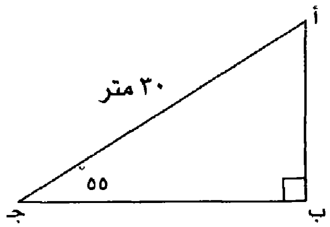
(١١- ٩) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

١. متوازي أضلاع أبعاده ١٨سم، ٢٥سم والزاوية الحادة فيه ٦٠°. احسب مساحته.

{ إرشاد: اقسمه إلى مثلثين متكافئين. }

٢. اعتماداً على الشكل ما طول كلٍ من أ ب، ب جـ علماً بأن جا٥٥° = ٠,٨

لأقرب منزلة عشرية واحدة.



٣. بين صحة المتطابقات التالية:

١- حا (١٨٠- س) = حاس

٢- جتا (٣ $\frac{\pi}{٢}$ - س) = - حاس

٤. أوجد قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المستقيمين:

ل١ : ص = ٤س - ٢

ل٢ : ٣ص = - ٢س + ٧ { ٧٠° تقريباً }

إرشاد: استعن بالقانون ظاهـ = $\left| \frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١} \right|$

٥. إذا كان جاس = - $\frac{٢}{٣}$ ، ظا س = $\frac{-٢\sqrt{٥}}{٥}$

أوجد الاقترانات الدائرية التالية:

جتاس، ظتاس، قاس، قتاس { $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، - $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، - $\frac{٣}{٢}$ }

٦. أوجد قيمتي أ ، ب اللتان تحققان كلاً من المعادلتين وعلى انفراد

١- جاس + $\sqrt{3}$ جتاس = أ جا (س + ب)

٢- جاس + $\sqrt{3}$ جتاس = أ جتا (س + ب)

$\{(\pm 2 ، \frac{\pi}{3} ، \frac{4\pi}{3}) ، (\pm 2 ، -\frac{\pi}{6} ، \frac{5\pi}{6})\}$

٧. أوجد مجموعة الحل للمعادلة

جتا ٢س = جتاس حيث $0 \leq$ س $< 360^\circ$

{ ١٢٠° ، ٢٤٠° ، استعن بالمتطابقة جتا ٢س = ٢ جتا^{2}س - ١}

٨. اكتب قياسات الزوايا التالية بالراديان

١- ∢ س = ٣١٥° $\{\frac{7\pi}{4}\}$ ء

٢- ∢ ص = - ٤٠٥° $\{\frac{-9\pi}{4}\}$ ء

٣- ∢ ع = ١٠٨٠° $\{6\pi\}$ ء

٩. اكتب قياسات الزوايا التالية بالدرجات

١- ∢ أ = $\frac{\pi}{8}$ ء { ٢٢٥° }

٢- ∢ ب = $\frac{-3\pi}{10}$ ء { - ٥٤° }

٣- ∢ جـ = ٨ π ء { ١٤٤٠° }

١٠. أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين

٢س - ٧ = - ٣١

س - ٢ص = - ٧ { ١١° تقريباً }

إرشاد استعن بالقانون ظاهـ = $\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}$

١١. بين صحة المتطابقة

جا^{4}س = $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}$ جتا ٢س + $\frac{1}{8}$ جتا ٤س

{ إرشاد نبدأ بالطرف الأيمن ثم نحول من حاس إلى جتاس لينتج الطرف الأيسر}

وكذلك المتطابقة

جا٤س = ٤ جتاس جاس (١ - ٢جا^{٢}س)

١٢. إذا كان جتاهـ = $\frac{٣}{٥}$ وكانت ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠° أوجد:

جتا٢هـ، جا٢هـ، ظا٢هـ { $\frac{-٧}{٢٥}$ ، $\frac{-٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$ }

١٣. احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٠ ، ٠)، ب (١ ، ٧)، جـ (٤ ، ٣). { ٤٥° ، ٤٥° ، ٩٠° }

{ إرشاد: جد أطوال الأضلاع بقانون المسافة ثم استخدم قانون الجيب}

١٤. بيّن صحة المتطابقة $\frac{\text{جا ٢هـ + جاهـ}}{\text{جتا ٢هـ + جتا هـ +١}}$ = ظا هـ

{ إرشاد: افرط جا٢هـ، جتا ٢هـ بدلالة هـ }

١٥. دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة ما قيمة

١- جتا (ـ ٣٠٠°)

٢- جا $\frac{٣\pi}{٤}$

{ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ }

١٦. ما قياس الزاوية أ في المثلث أ ب جـ الذي أطوال أضلاعه

$\bar{أ}$ = ٢سم، $\bar{ب}$ = ٣سم ، $\bar{جـ}$ = ٤سم { ٢٩° تقريباً}

{ إرشاد: استعن بقانون جيب التمام}

١٧. اكتب السعة والدورة لمنحنى الاقتران ق (س) = ٢جا $\frac{١}{٢}$ س { ٢ ، ٤ π }

١٨. ما قياس الزاوية أ في المثلث أ ب جـ الذي أطوال أضلاعه

$\bar{أ}$ = ١٠سم، $\bar{ب}$ = ٨ سم، $\bar{جـ}$ = ٦سم {٩٠°}

{إرشاد: استعن بنظرية فيثاغورس أو قانون جيب التمام}

١٩. إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب وكان قاجـ = قتاجـ وكان طول أجـ = $\sqrt{٥٠}$ سم أوجد أطوال أضلاع المثلث.

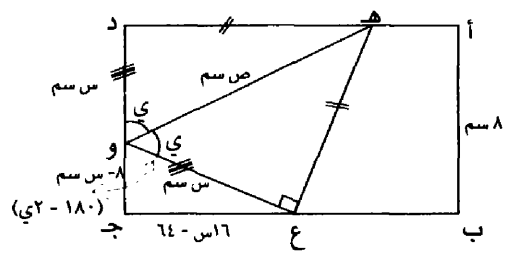
{٥، ٥، ٥$\sqrt{٢}$}

٢٠. احسب مساحة المثلث أ ب جـ المتساوي الساقين الذي زاوية رأسه ١٣٨° وطول كل من ساقيه ١٥سم. {٧٥سم^{٢} تقريباً}

{إرشاد: جا ١٣٨° = جا (١٨٠- ٤٢) = حا ٤٢° = ٠٫٦٦٩}

٢١. أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم طويت الزاوية أ د جـ وفق الخط هـ و حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ عند ع (كما في الشكل) فإذا كان طول د و = س سم، هـ و = ص سم، ما العلاقة بين س، ص {ص^{٢} = $\frac{س^{٣}}{س - ٤}$}

{إرشاد: استعن بالشكل واستخدم جتا (١٨٠- ٢ي) = - جتا ٢ي، جتا ٢ي = $\frac{٨- س}{س}$ ، جتا ي = $\frac{س}{ص}$ }



٢٢. إذا كانت ٩٠° < هـ < ١٨٠° وكان جاهـ = $\frac{١}{\sqrt{١٧}}$ ، أوجد ظاهـ.

{$-\frac{١}{٦}$}

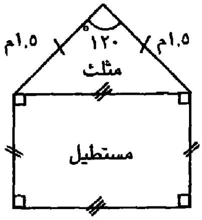
٢٣. جد قيمة حاهـ، جتاهـ، ظاهـ، قاهـ، قتاهـ، ظتاهـ إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها هـ (في الوضع القياسي) دائرة الوحدة في النقطة ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

{$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $-\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، -٢ ، $\sqrt{٣}$ }

٢٤. بين أن جا^{٢}٣١٥° + جتا٣٠٠° + جا^{٢}٣٣٠° = ١

{بلا استخدام الجداول وبدون الاستعانة بالالات الحاسبة}

٢٥. ما مساحة الشكل المجاور بالأمتار المربعة



٢٦. المثلث أ ب جـ فيه قياس ∢ جـ = ١٢٠°، جـَ = ١٥ سم، أَ = ١٠ سم

احسب قياس الزاوية أ بالدرجات

{ إرشاد : استعن بقانون الجيب}

٢٧. أ ب جـ المثلث فيه $\frac{١}{٤}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٢}$ جا جـ

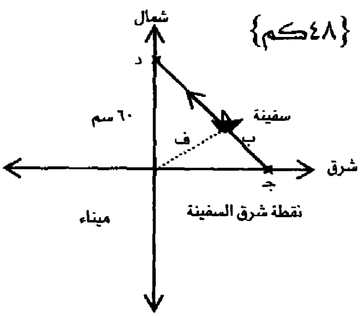
أو قياسات زواياه الثلاث { ٨٠°، ٦٠°، ٤٠°}

{ إرشاد : إعكس قانون الجيب واستخدم التناسب}

٢٨. انطلقت سفينة من نقطة جـ الواقعة شرق الميناء أ وتبعد عنه ٨٠ سم وسارت السفينة على خط مستقيم جـ د في عرض البحر باتجاه النقطة ب الواقعة شمال الميناء أ وتبعد عنه ٦٠ كم.

جد أقصر مسافة (ف) بين السفينة والميناء {٤٨كم}

{إرشاد : أوجد معادلة ب جـ}



٢٩. باستخدام القوانين المثلثية أوجد قيمة

جا ٧٥°، جتا ٧٥°، ظا ٧٥°.

٣٠. دون استخدام الجداول أوجد قيمة

١- جتا ٧٥° + جتا ١٥°

٢- جا ١٠٥° + جا ١٥°

٣١. أوجد مجموعة الحل للمعادلة

ظاس ظا٢س ـ ظا س + ظا ٢س = ١   حيث ٠ $\leq$ س $<$ ٢π

{إرشاد: اجعل المعادلة في طرف واحد ثم حلل إلى العوامل}

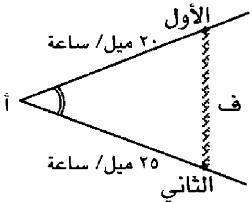
٣٢. دون استخدام الجداول واستعانة بالآلات الحاسبة أوجد قيمة

١- ٢جا ١٥° جتا ١٦٥° $\{-\frac{١}{٢}\}$

٢- جتا ٧٥° جتا ١٥° $\{\frac{٢-\sqrt{٣}}{٤}\}$

٣٣. زورقان تجاريان تحركا من مكان واحد الأول بسرعة ٢٠ ميل/ الساعة والثاني بسرعة ٢٥ ميل/ الساعة. جد البعد بين الزورقين بعد ساعتين من لحظة تحركهما علماً بأن الزاوية بين اتجاهيهما ٤٥° وكل منهما يتحرك على خط مستقيم كما في الشكل.

{ إرشاد: يمكن حل السؤال بدلالة ؟}



٣٤. أي من أزواج الزوايا التالية في الوضع القياسي لها ضلع الانتهاء نفسه

(١) (٦٠°، ـ ٣٠٠°)   (٢) (١٢٠°، ٢٤٠°)

(٣) (ـ π، π)   (٣) (٥٠°، ٤١٠°)

{الأول والثالث والرابع}

٣٥. ما نصف قطر الدائرة التي فيها القوس الذي يقابل الزاوية ٤٥° يساوي ٢٠ سم

{إرشاد: طول ٤٥° إلى التقدير الدائري، الراديان}

٣٦. لتكن الزاوية هـ في وضعها القياسي، أوجد جاهـ، جتاهـ، ظاهـ عندما يمر ضلع الانتهاء لها بالنقطة

(١) (٧،٥)   (٢) (ـ ٦، ١٠)   (٣) (ـ ١، ـ ٢)

{إرشاد: كوِّن مثلثاً قائم الزاوية}

٣٧. لتكن الزاوية هـ في وضعها القياسي، ففي أي ربع (أو أرباع) يمكن أن تقع الزاوية هـ في كل من الحالات:

(١) جتاهـ > صفر

(٢) جاهـ = جتاهـ

(٣) جتاهـ = ـ جاهـ

(٤) قاهـ > صفر «و» قتاهـ > صفر أيضاً

(٥) ظاهـ < صفر «و» ظتاهـ < صفر أيضاً

٣٨. إذا علمت أن معادلة دائرة الوحدة هي $س^٢ + ص^٢ = ١$، بين ان المعادلة تمر بالنقطة ($\frac{-٥}{١٣}$ ، $\frac{-١٢}{١٣}$) ومن ثم أوجد جاهـ، جتاهـ، ظاهـ إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية هـ في وضعها القياسي يمر بالنقطة نفسها.

٣٩. أوجد قيم جميع النسب المثلثية الست للزوايا التي قياسها كل منها:

$٤٩٥°$، $\frac{٥}{٦}\pi$، $-٩٠°$، $-٦٠°$

٤٠. إذا كان جتا أ = $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ وكان جتاب = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ وكلا الزاويتين أ، ب تقعان في الربع الالثالث فما قيمة

جا (أ ـ ب)، جتا (أ + ب)، ظا٢أ.

٤١. إذا كانت جتاأ = $\frac{١}{٣}$ ، $٠ \leq أ < \frac{\pi}{٢}$ فما قيمة

جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ظا $\frac{أ}{٢}$

٤٢. حل المعادلة التالية حيث $٠ \leq س < ٢\pi$

(١) ٢جاس ـ ١ = صفر $\{٣٠°، ١٥٠°\}$

(٢) $٢جا^٢س$ ـ جاس ـ ١ = صفر $\{٩٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°\}$

(٣) جاس ـ جا $\frac{س}{٢}$ ـ ١ = صفر {صفر، $\frac{٢}{٣}\pi$، ٢π}

{إرشاد: جاس = ٢جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ }

(٤) جتا^{٢}س- جا^{٢}س - $\frac{١}{٢}$ = صفر　　{٣٠°، ١٥٠°}

(٥) قا^{٢}س – ٣قاس + ٢ = صفر　　{$\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٥}{٣}\pi$، ٢π}

(٦) ظاس - $\sqrt{٣}$ = صفر　　{$\frac{\pi}{٦}$، $\frac{٧}{٦}\pi$}

٤٣. بين صحة المتطابقات

(١) ١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

(٢) $\frac{١+ جتاس}{جاس} = \frac{جاس}{١ - جتاس}$　(نطبق المقام)

(٣) قا^{٢}س (١- جتا^{٢}س) = ظا^{٢}س

(٤) $\frac{١- جا^{٢}س}{١- جتا^{٢}س}$ = ظتا^{٢}س

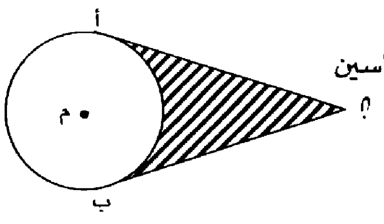
(٥) $\frac{جتا٢س}{١+ جا٢س}$ = ظا (٤٥° - س)

٤٤. ما مساحة المثلث أ ب جـ الذي أطوال أضلاعه ١٣، ١٤، ١٥سم {٨٤ سم^{٢}}

٤٥. أوجد مساحتي القطاع والقطعة في دائرة نصف قطرها ١٠ سم وزاويته (زاويتها) المركزية ٣٠°.

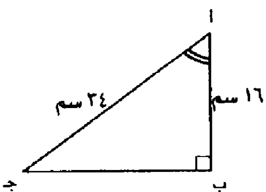
٤٦. دائرة مركزها م ونصف قطرها ٦٠ سم، ؟ نقطة خارجها، رُسم ؟أ، ؟ب مماسان للدائرة طول كل منها ٨٠ سم.

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المماسين والقوس الأصغر أ ب كما في الشكل



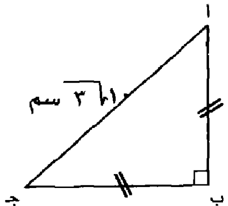
٤٧. اعتماداً على الشكل المجاور أوجد

جاأ، جتا أ، ظاجـ



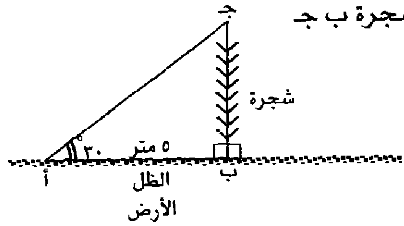
٤٨. إذا كان جاس = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاس = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$

أوجد ظاس، ظتاس، قاس، قتاس، حيث $٠ \leq$ س $< ٩٠^\circ$



٤٩. اعتماداً على الشكل المجاور أوجد

جا^{٢}أ، جتا^{٢}أ، ظا^{٢}أ



٥٠. من الشكل المجاور أوجد ارتفاع الشجرة ب جـ

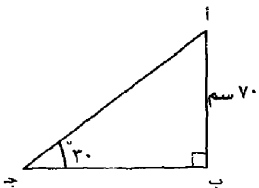
إذا كان طول ظلها أ ب = ٥ متر.

٥١. إذا علمت أن الزاوية هـ حادة،

ما قياسها إذا كان ظاهـ = ظتاهـ {٤٥°}

٥٢. حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب (أي أوجد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه)

علماً بأن $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢١



٥٣. إذا علمت أن ظاهـ = $\frac{١٢}{٥}$ ، $١٨٠^\circ \leq$ هـ $< ٢٧٠^\circ$ أوجد

جا^{٢}هـ، جتا^{٢}هـ، جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ، جا^{٢}هـ ـ جتا^{٢}هـ، ظتا^{٢}هـ

٥٤. أ ب جـ مثلث متساوي الساقين أ ب = أ جـ فإذا كان جاجـ =

فأوجد النسبة بين ب جـ إلى أ ب {٣:٢}

٥٥. أكتب القيمة العددية لكل مما يلي دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة:

(١) جا^٢ ٣٢° + جا^٢ ٥٨° (٢) جا ٣٠° + جا ٦٠°

(٣) جا^٢ ٦٠° + جتا^٢ ٤٥° (٤) ١ ـ ظا^٢ ٤٥°

٥٦. إذا كانت الزاوية س حادة، وكان جاس = جتاس فجد لكليهما { $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ }

وكان ظاس = ظتاس، فجد كليهما {١، ١} ثم إذا كان قاس = قتاس

فجد كليهما { $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ }

{إرشاد: أوجد أولاً قياس الزاوية س في جميع الحالات}

٥٧. إذا كان جاس + جتاس = $\frac{٧}{٥}$ أوجد جا٢س حيث ٠ ≤ س < ٩٠°

{ $\frac{٢٤}{٢٥}$ }

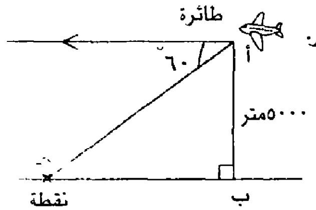
٥٨. حل المعادلات التالية حيث ٠ ≤ س < ٣٦٠°

(١) جا٧س = جتا٨ س

(٢) ٢جاس = قتا س

(٣) ٢جتا^{٢}س ـ ٥ جتا س +٢ = صفر

٥٩. رصد طيار نقطة على سطح الأرض من طائرة وهو في عنان السماء فكانت زاوية انخفاضها في لحظة ما ٦٠° جد بعد النقطة عن الطائرة علماً بأن الطائرة تسير على ارتفاع ثابت قدره ٥٠٠٠ متر.



٦٠. إذا كان جتاس = ٠,٨، ٠ ≤ س < ٩٠° ما قيمة $\frac{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}{(جتاس ـ جاس)^{٢}}$

{٢٥}

٦١. أي من العبارات التالية هو الصواب

(١) جا٩٠° = ٢جا٤٥°

(٢) جا٩٠° = ٢جا ٣٠°

(٣) جا٩٠° = جتا٣٠° + جا ٦٠°

٦٢. بين أن (جاس + جتاس)^{٢} + (جاس - جتاس)^{٢} = ٢

٦٣. ما قيمة كل من دون استخدام الجداول أو الاستعانة بالآلات
جا ٧٥° جا ١٥° ، جتا ١٠٥° جتا ١٥°

٦٤. حل المثلث أ ب جـ الذي فيه ∢ أ = ٦٠° ، ∢ ب = ٤٥° ، جـ = ١٠ سم

٦٥. سُلّم طوله ٦ أمتار يرتكز على حائط، فإذا كان يصنع مع الأرض زاوية قياسها ٧٥° ، كم متراً يرتفع رأسه عن الأرض؟

٦٦. حل المعادلة ٢جا^{٢}س + ٣جتاس = ٣، ٠ ≤ س < ٣٦٠°

٦٧. إذا كانت س قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية وكان جاس = ٠.٣ فجد كلاً من: جتاس، ظاس، قاس، قتاس، ظتاس

٦٨. ما قياس الزاوية بالتقدير السيني التي تقابل قوساً طوله ٨ سم في دائرة نصف ١٢سم ؟

٦٩. زاويتان مجموع قياسهما $\frac{٧\pi}{٦}$ بالراديان والفرق بين قياسهما ٣٠° بالدرجات، جد قياس كل منهما بالتقدير الدائري (الراديان) ثم الستيني (الدرجات).

٧٠. باعتبار خط الاستواء دائرة نصف قطرها ٦٦٥٠ كيلومتر جد لأقرب كيلومتر البعد بين مدينتين على خط الاستواء إذا كان الخط الواصل بينهما يقابل زاوية مركزية قياسها ١٥° في دائرة خط الاستواء؟

٧١. إذا مرّ ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها هـ بالنقطة (- ٢ ، - ٢) فما قيمة كل من جاهـ، جتاهـ، ظاهـ {إرشاد: كون مثلث قائم الزاوية وانتبه للإشارات}

٧٢. دون استخدام الجداول أو الاستعانة بالآلات أوجد

(١) جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٣}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$ جا $\frac{\pi}{٣}$

(٢) جتا $\frac{\pi}{٦}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا $\frac{\pi}{٦}$ جا $\frac{\pi}{٤}$

٧٣. صف العلاقة بين الاقترانين ق(س)، ل(س) في كل من الحالات:

(١) ق(س) = جاس ، ل(س) = (جاس) + ٥

(٢) ق(س) = جتاس ، ل(س) = (جتاس) - ٢

٧٤. إذا كان جاأ = $\frac{٣}{٥}$ ، جاب = $\frac{٥}{٧}$ ، أ ، ب، زاويتان في الربع الأول

أوجد ظا (أ + ب)، ظا (أ - ب) ثم النسبة بينهما.

٧٥. بين أن {ظا (٤٥ - س)} {ظا (٤٥ + س)} = ١

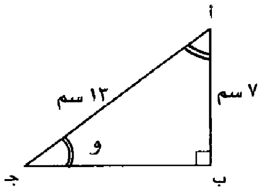
٧٦. إذا كان البعد الأفقي لقذيفة أطلقت من مدفع بزاوية قياسها هـ مع المستوى الأفقي

وبسرعة ($ع_٠$) البدائية مقدارها ٤٩ م/ت يعطى بالعلاقة ف = $\frac{ع_٠^{٢}}{٩٫٨}$ جا٢هـ

ما قياس الزاوية التي يجب أن تطلق بها القذيفة لتصل مسافة ٢٠٠ متراً.

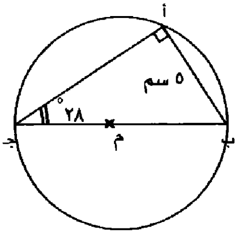
٧٧. إذا كان جتاس = $\sqrt{\frac{٧}{١١}}$ ، ٠ ≤ س < $\frac{\pi}{٢}$ ما قيمة ظاس؟

٧٨. من الشكل المجاور احسب قيمة و بالدرجات باستخدام الجداول أو الآلات الحاسبة.



٧٩. من الشكل المجاور احسب نصف قطر الدائرة

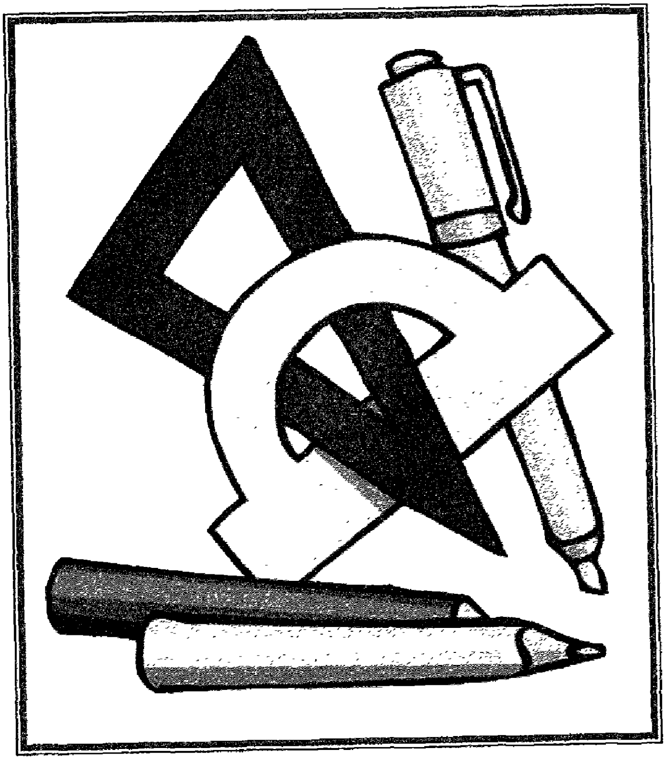
{إرشاد : استعن بالجداول أو الآلات الحاسبة}



٨٠. إذا كانت الزاوية س = ٦٠°

أوجد جتا²س، جتاس² { $\frac{١}{٤}$ ، ١}

الأسس
واللوغاريتمات
Indices and Logarithms



تُعتبر الأسس أحد أبرز الأساليب الرياضية المتميزة بالسهولة وعدم التعقيد، وما ابتكرت إلا لتسهيل العمليات الرياضية المتعلقة بالضرب والقسمة والقوى والجذور للأعداد الحقيقية بعد تحويلها إلى عمليات رياضية مكافئة لها ولكن في غاية السهولة والدقة مثل الجمع والطرح والضرب، وإليك البيان:

(١٢ـ ١) قوانين الأسس

إذا ضرب العدد الحقيقي ٢ في نفسه أربع مرات على سبيل المثال، فإن حاصل الضرب الناتج يمكن كتابته على الصورة ٢× ٢× ٢× ٢= ١٦ أي أن؛ ١٦ = $٢^{٤}$

هذه هي الصورة الأسية للعدد ٢ عندها؛ يسمى العدد ٢ الأساس Base

والعدد ٤ الأُس Index

والعدد ١٦ القوة Power الرابعة للعدد٢

وبصورة عامة؛ إذا ضرب العدد الحقيقي أ في نفسه م من المرات فإن حاصل ذاك يكتب على الصورة أ× أ× أ× .....× أ إلى م مرة.

أي أن $أ^{م}$ هي الصورة الأسية للعدد الحقيقي أ.

والآن دونك قوانين الأسس دون إثبات أو برهان وإنما توضيحها بالأمثلة العددية والبيان في بعض الأحيان والتفسير اللغوي وبإيجاز

(١) $أ^{م} × أ^{ن} = أ^{م + ن}$ والتفسير: عند الضرب تجمع الأسس إذا تساوت الأساسات

⇦ مثال: $٢^{٥} × ٢^{٣} = ٢^{٥ + ٣} = ٢^{٨}$

(٢) $أ^{م} ÷ أ^{ن} = أ^{م - ن}$ والتفسير: عند القسمة تطرح الأسس إذا تساوت الأساسات

⇦ مثال: $٢^{٥} ÷ ٢^{٣} = ٢^{٥ - ٣} = ٢^{٢}$

(٢) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ والتفسير: عند الرفع تُضرب الأسس

⇦ مثال: $(٢^{٣})^{٥} = ٢^{٣ × ٥} = ٢^{١٥}$

والبيان $(٢^{٣})^{٥} = ٢^{٣} × ٢^{٣} ×٢^{٣} ×٢^{٣} ×٢^{٣} = ٢^{٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣} = ٢^{١٥}$

(٢) الأس الصفري؛ $(أ)^{0} = ١$ بالتعريف

والتفسير: عند رفع أي عدد حقيقي إلى أس صفري فالناتج يكون «١» صحيح.

دون أن يكون لذلك أي معنى رياضي

⇦ مثال: $(٢)^{0} = ١$، $(-٢)^{0} = ١$، $(\frac{١}{٢})^{0} = ١$، $(\sqrt{٢})^{0} = ١$

البيان: $أ^{م} \div أ^{م} = \frac{أ^{م}}{أ^{م}} = أ^{م-م} = ٢^{0}$ باستخدام الأسس

لكن $أ^{م} \div أ^{م} = \frac{أ^{م}}{أ^{م}} = ١$ باستخدام الاختصار

أي أن $(أ)^{0} = ١$

(٢) الأس السالب لا معنى له، لذا يجب تحويله إلى أُس موجب وذلك بتغيير مكانه، فإذا كان في البسط أُنزل إلى المقام وإذا كان في المقام أُصعد إلى البسط بعد تغيير إشارته من سالبة إلى موجبة أو العكس هكذا

البيان: $(أ)^{-م} = \frac{١}{(أ)^{م}}$ وكذلك $\frac{١}{(أ)^{-م}} = أ^{م}$

⇦ مثال: $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}}$ وكذلك $\frac{١}{٢^{-٣}} = ٢^{٣}$

(٢) الأس النسبي لا معنى له إلا عند تحويله إلى صورة أخرى هي الجذور، وهنا يجب أن نوضح حالتين:

الحالة الخاصة وهي؛ $(أ)^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ (حيث أ $\in$ ح، ن عدد طبيعي أكبر من ١)

وللحالة الخاصة هذه شقان هما:

الشق الأول: $\sqrt[ن]{أ}$ = عدد حقيقي عندما أ $\in$ ح، ن عدد طبيعي فردي أكبر من ١ أي أن ن $\in$ {٣، ٥، ٧، ...}

⇦ مثال: $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

وكذلك $\sqrt[٣]{-٨} = -٢$

⇦ مثال: $\sqrt[5]{243} = 3$

وكذلك $\sqrt[5]{-243} = -3$

الشق الثاني: $\sqrt[ن]{أ}$ = عدد حقيقي عندما أ ∋ ح + «موجبة فقط»

ن عدد طبيعي زوجي أكبر من ١، ن ∋ {٢، ٤، ٦، .....}

⇦ مثال: $\sqrt{9} = 3$

وأما $\sqrt{-9}$ فليس عدد حقيقي (إنما عدد مركب يبحث في مكانه في هذا المؤلف).

⇦ مثال: $\sqrt[4]{16} = 2$

وأما $\sqrt[4]{-16}$ فليس عدد حقيقي

الحالة العامة: $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^م}$ يسمى العدد دليل الجذر

فعند التحويل $أ^{\frac{م}{ن}}$ إلى $\sqrt[ن]{أ^م}$ فإن مقام الأس النسبي يصبح دليلاً للجذر وأما البسط فيصبح أساً للعدد أ كما في الأمثلة:

$$(64)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(64)^2} = \sqrt[3]{64 \times 64} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{64}$$

$$= 4 \times 4 = 16$$

$$(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)} = -2$$

(٣) $(أ\ ب)^م = أ^م \times ب^م$ والتفسير: توزيع الأس بعملية الضرب

⇦ مثال: $(6)^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$

البيان: $6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7776$

وكذلك $2^5 \times 3^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = (32)(243) = 7776$.

(٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^م = \frac{أ^م}{ب^م}$ والتفسير: توزيع الأس بعملية القسمة

⇦ مثال: $\left(\frac{١٦}{٨}\right)^{٢} = \frac{(١٦)^{٢}}{(٨)^{٢}}$

البيان $\left(\frac{١٦}{٨}\right)^{٢} = \left(\frac{١٦}{٨}\right)\left(\frac{١٦}{٨}\right) = \frac{٢٥٦}{٦٤}$

وفي هذا السياق دونك الملحوظة التالية:

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{(أ)^{-م}}{(ب)^{-م}}\right) = \frac{(ب)^{م}}{(أ)^{م}} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{م}$$

أو مباشـرة: $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{م}$ وكمـا قـال أحـدهم غـير البـسط بالمقـام والعكس ثم غير السالب بالموجب.

⇦ مثال: $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٤} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{٣^{٤}}{٢^{٤}} = \frac{٨١}{١٦}$ وهكذا

⇦ مثال: أختصر $\frac{٢^{٥} \times ٢^{٣} \times ٩^{\frac{٣}{٢}}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}} = \frac{٢^{٥} \times ٢^{٣} \times \sqrt{٩^{٣}}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}}$

$$= \frac{٢^{٥} \times ٢^{٣} \times \sqrt{٩ \times ٩ \times ٩}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}} = \frac{٢^{٥} \times ٢^{٣} \times ٣^{١} \times ٣^{١} \times ٣^{١}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}}$$

$$= \frac{٢^{٥} \times ٢^{٥}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}} = \frac{٢^{٥}}{٢^{٤}} = ٢^{٥-٤} = ٢$$

سنناقش بعض المفاهيم والمعطيات التي لها ارتباط وثيق بالأسس وقوانينها مثل:

«١» قوى العشرة Ten Powers

من أشهر الأساسات المتداولة في الرياضيات الأساس (١٠) كونه يرتبط بمجموعة الأعداد الصحيحة كأسس بالذات واعتماداً على قوانين الأسس فإن:

$(١٠)^{-٣} = \frac{١}{١٠^{٣}} = \frac{١}{١٠٠٠} = ٠,٠٠١$ (أسس سالبة)

$(١٠)^{-٢} = \frac{١}{١٠^{٢}} = \frac{١}{١٠٠} = ٠,٠١$

$$(١٠)^{-١} = \frac{١}{١٠^{١}} = \frac{١}{١٠} = ٠.١$$

$(١٠)^{٠} = ١$ بالتعريف

$(١٠)^{١} = ١٠$

$(١٠)^{٢} = ١٠ \times ١٠ = ١٠٠$

$(١٠)^{٣} = ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ١٠٠٠$ وهكذا.

«٢» **البادئات** Prebixes

والبادئة كلمة لا يتم معناها إلا بارتباطها بأخرى، مثل الكيلو Kilo بادئة تعني قيمة العدد ١٠٠٠ بشكل مجرد وبلا تمييز لكن عندما ترتبط بكلمات أخرى يُصبح لها معنى وقيمة مميزان عن غيرها.

هكذا:

كيلوغرام = ١٠٠٠ غرام كوحدة لقياس الكتلة Mass

كيلومتر = ١٠٠٠ متر كوحدة لقياس المسافة Distance

كيلولتر = ١٠٠٠ لتر كوحدة لقياس السعة Capacity

كيلوواط = ١٠٠٠ واط كوحدة لقياس القدرة Electric Power

ولقد استخدم النظام الدولي للوحدات بعض الرموز والألفاظ الإغريقية كبادئات للتعبير عن مضاعفات الأعداد الكبيرة وأجزائها وبالتالي أمكن التعبير عن أكبر الأعداد الحقيقية قيمة وأصغرها أيضاً بقوى العشرة كما يلي:

جيجا Giga وقيمتها ألف مليون وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{٩}$

ميجا Mega وقيمتها مليون وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{٦}$

كيلو Kilo وقيمتها ألف وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{٣}$

هيكتو Hecto وقيمتها مائة وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{٢}$

ديكا Deca وقيمتها عشرة وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{١}$

والقوى هنا موجبة حيث البادئات تعبر عن أعداد كبيرة (أكبر من الواحد الصحيح).

وعندما تعبر البادئات عن أعداد صغيرة (أصغر من الواحد الصحيح) فالقوى تصبح سالبة هكذا:

ديسي Deci وقيمتها جزء من عشرة وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{-١}$

سنتي Centi وقيمتها جزء من مائة وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{-٢}$

مللي Melli وقيمتها جزء من ألف وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{-٣}$

ميكرو Micro وقيمتها جزء من مليون وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{-٦}$

نانو Nano وقيمتها جزء من ألف مليون (مليار) وحسب قوى العشرة يعبر عنها بـ $١٠^{-٩}$

ومن التطبيقات على قوى العشرة بأسس سالبة أطوال أمواج الإشعاعات المختلفة مقدرة بوحدة السم كما يلي:

الطول الموجي للأشعة تحت الحمراء = $١٠^{-٢}$سم

الطول الموجي للأشعة المرئية = $١٠^{-٥}$سم

الطول الموجي للأشعة فوق البنفسجية = $١٠^{-٦}$سم

الطول الموجي للأشعة X = $١٠^{-٨}$سم

وأخيراً الطول الموجي لأشعة جاما = ف$١٠^{-١٢}$سم إلى $١٠^{-١٠}$سم

وهناك من البادئات العدد الكثير ولكننا سنكتفي بهذا القدر القليل فقط.

«٣» الصورة العلمية أو القياسية Standard Form

وهي الصورة القياسية للأعداد النسبية الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً بعد تمثيلها تمثيلاً عشرياً والذي يجب أن يضم بين منازله الفاصلة هكذا:

كل عدد حقيقي سواء أكان صحيح أو نسبي فإنه يحتوي الفاصلة «و» بين منازله، مثل ٤,٥٠ وكذلك ٨٥٠,٠ وكذلك ٠,٤٠٠٠٩ وهكذا.

تبلغ سرعة الضوء ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ م/ ث

وكتلة الهيدروجين ٠,٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٦٦ غم

وكتابة هذه الأعداد الحقيقية بهذه الصورة مع وجود أصفار عديدة يُربك الدارس عند قراءتها وعند إجراء الحسابات عليها، لذا وجب التعبير عنها بطريقة تُسهّل التعامل معها، من هنا جاءت الصورة العلمية أو القياسية للعدد الحقيقي، والصورة العلمية للعدد الحقيق الموجب أو السالب هي:

ع × $١٠^{ن}$ حيث ع عدد عشري (صحيح أو كسري) ينتمي إلى الفترة [١ ، ١٠)

والتفسير؛ ع عدد أكبر من أو يساوي ١ و أصغر من ١٠ أو، ١ ≤ ع < ١٠ وحيث ن عدد صحيح ، ن ∋ ص موجب أو صفر أو سالب.

ولكتابة العدد ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ م/ ث بالصورة العلمية فإننا نبحث عن الفاصلة أولاً وهنا الفاصلة في بداية العدد هكذا ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠. ونحركها لليسار حتى تصبح قيمة العدد واقعة ضمن الفترة [١ ، ١٠) هكذا ٣,٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ وبهذه العملية صغر العدد وحتى نعيده إلى قيمته الأصلية نضربه بالعدد ١٠ مرفوعاً للأسس المساوي لعدد المنازل التي تحركتها الفاصلة نحو اليسار وهنا ٨ منازل وجميعها أصفار والأس موجب (كوننا نريد تكبير العدد)

أي أن ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = ٣,٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ × $١٠^{٨}$ م/ ث

إذن سرعة الضوء = ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ م/ ث أو ٣ × $١٠^{٨}$ م/ ث

والصورة ٣ × $١٠^{٨}$ م/ ث هي الصورة القياسية الأسهل للقراءة والكتابة أيضاً

أي أن ٣٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = ٣,٠٠٠ × $١٠^{٨}$ م/ ث والقيمة ثابتة لا تتغير

وكذلك لكتابة العدد ١٦٦ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠,٠٠

نحرك الفاصلة لليمين ليصبح العدد واقعاً ضمن الفترة [١ ، ١٠) هكذا ١,٦٦ فيكبر العدد وحتى نعيده إلى قيمته الأصلية نضربه بالعدد ١٠ مرفوعاً لأس يساوي عدد المنازل التي تحركتها الفاصلة نحو اليمين وهنا ٢٤ منزلة بما فيها ٢٣ صفراً والأس سالب تحركتها (كوننا نريد تصغير العدد).

أي أن ١٦٦ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠. = ١,٦٦ × $١٠^{-٢٤}$ غم

كتلة ذرة الهيدروجين

وبأسلوب مماثل نستطيع كتابة الأعداد الكبيرة جداً والصغيرة جداً ليسهل قراءتها وليس هذا فحسب بل ليسهل إجراء العمليات الحسابية عليها وعلى وجه الخصوص عملية الضرب كما في المثال:

⇦ مثال: أوجد حاصل ضرب ٠,٠٠٠٣. × ٥ ٠٠٠ ٠٠ .٠ بعد وضع كل عدد بالصورة العلمية وإجراء عملية الضرب هكذا:

$$٠.٠٠٠٣ \times ٠.٠٠٠٠٠٥ =$$

$$= ٣ \times ١٠^{-٤} \times ٣ \times ١٠^{-٦}$$

$$= ١٥ \times ١٠^{-١٠}$$ (عند الضرب تجمع الأسس)

$$= ١,٥ \times ١٠^{١} \times ١٠^{-١٠}$$

$$= ١,٥ \times ١٠^{-٩}$$

$$\therefore ٠.٠٠٠٣ \times ٠.٠٠٠٠٠٥ = ١,٥ \times ١٠^{-٩}$$ (بالصورة العلمية)

وهذا الأسلوب «كتابة الأعداد بالطريقة العلمية» يفيد في إجراء عمليات الضرب، لذا فإنه يستخدم في الكمبيوتر أو الآلة الحاسبة.

ويجب التنبيه بأن العدد السالب كالعدد الموجب كلاهما سواء يمكن كتابته بالصورة العلمية دون النظر إلى إشارته (موجب أو سالب) ودون أن تؤثر الإشارة السالبة على وضعه بالصورة العلمية كما في المثال:

⇦ مثال: أكتب العدد - ٥٤٠٠٠٠ بالصورة العلمية

$$-٥٤٠٠٠٠ = ٥,٤ \times ١٠^{٥}$$ (الإشارة لا علاقة لها بالصورة)

وكذلك $-٠,٠٠٠٠٠١٤ = ١,٤ \times ١٠^{-٦}$ وهكذا

⇦ مثال تطبيقي: أكتب القيم التالية بالصورة العلمية:

(١) كتلة الأرض = ٥٩٩٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ كيلو غرام

«٢٢ صفراً»

الحل: $٥,٩٩ \times ١٠^{٢٤}$ كيلو غرام كتلة الأرض

(٢) كتلة الشمس = ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٩٩٠ كيلو غرام

«٢٨ صفراً»

الحل: ١,٩٩ × $١٠^{٣٠}$ كيلو غرام كتلة الشمس

(٢) كتلة البروتون = ١٧٦٣ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠,٠٠ كيلو غرام

«٢٦ صفراً»

الحل: ١,٧٦٣ × $١٠^{-٢٧}$ كيلو غرام كتلة البروتون

(١٢ - ٢) الاقتران الأسي Exponential Function

الاقترانـات الأسـية صـنفٌ Type مـن الاقترانـات الحقيقيـة المتسامية (غـير الجبريـة) ولهـذه الاقترانـات اسـتخدامات عديـدة في وصـف الكـثير مـن الظـواهر الفيزيائية والاقتصادية وغيرها.

يُسمى الاقـتران ق(س) المُعَـرف بالقاعـدة: ق(س) = أ^س^ حيـث أ عـدد حقيقـي أكبر من صفر ولا يساوي العدد الصحيح واحد.

أي أن أ > صفر و أ ≠ ١

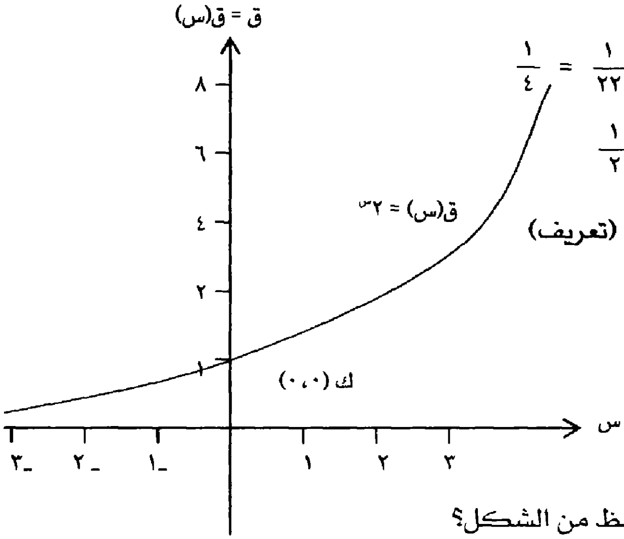
وكذلك س ∈ ح اقتراناً أسياً، أساسه العدد الثابت أ وأُسه المتغير س

ولتمثيـل الاقــتران ق(س) = ٢^س^ علــى ســبيل المثــال بيانيــاً علــى المستوى الديكارتي نقوم بتكوين هذا الجدول البسيط عن طريق اختيـار مجموعـة مـن قيـم المتغير س (قيم سالبة والصفر وأخرى موجبة) هكذا.

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ق(س) = ٢س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

ونجد قيمة ق(س) هكذا وحسب قوانين الأسس:

ق(- ٣) = $٢^{-٣}$ = $\frac{١}{٢^{٣}}$ = $\frac{١}{٨}$



ق(- ٢) = $٢^{-٢}$ = $\frac{١}{٢^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$

ق(- ١) = $٢^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

ق(٠) = $٢^{٠}$ = ١ (تعريف)

ق(١) = $٢^{١}$ = ٢

ق(٢) = $٢^{٢}$ = ٤

ق(٣) = $٢^{٣}$ = ٨

سؤال: ماذا تلاحظ من الشكل؟

جواب؛ هناك ملحوظات عدة على الاقتران الأسي ق(س) = $٢^{س}$ وبشكل عام على الاقتران ق(س) = $أ^{س}$ حيث أ > ١ ، أ ∈ {٢، ٣، ٤، ...}.

(١) قيمة الاقتران موجبة كونه يقع فوق محور السينات أي أن:

مداه هو $ح^{+}$ أو (٠ ، ∞)

(٢) منحناه يقطع محور الصادات في النقطة ك (٠ ، ١) مهما اختلف مقدار أسه مثل:

$ق_١$(س) = $٢^{س}$ ، $ق_٢$(س) = $٣^{س}$ ، $ق_٣$(س) = $٤^{س}$ ، ... إلخ

(٣) اقتران واحد لواحد حيث الخط الأفقي لا يقطعه إلا في نقطة واحدة أينما وجد (اختبار الخط الأفقي)

(٤) تزداد قيمة ق(س) با زدياد قيم المتغير س .. فهو اقتران متزايد وصاعد كما نلاحظ من الشكل.

ولتمثيل الاقتران ق(س) = $أ^{س}$، حيث ٠ < أ < ١

مثل ق(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ = $٢^{\frac{١}{س}}$ = $٢^{-س}$

أي أن $٢^{-س} = (\frac{١}{٢})^{س}$ وهكذا

نقوم بتكوين الجدول البسيط وبأسلوب مماثل هكذا

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$ق(س) = ٢^{-س}$	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

حيث وحسب قوانين الأسس

$ق(-٣) = ٢^{-(-٣)} = ٢^{٣} = ٨$

$ق(-٢) = ٢^{-(-٢)} = ٢^{٢} = ٤$

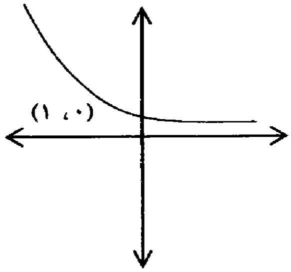
$ق(-١) = ٢^{-(-١)} = ٢^{١} = ٢$

$ق(٠) = ٢^{-(٠)} = ٢^{٠} = ١$ (تعريف)

$ق(١) = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$

$ق(١) = ٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$

$ق(١) = ٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$



$ق_{١}(س) = ٢^{-س} = (\frac{١}{٢})^{س}$

والملاحظات

(١) اقتران موجب كونه يقع فوق محور السينات أي أن:

مداه هو $ح^{+}$ أو (٠ ، ∞)

(٢) منحناه يقطع محور الصادات دائماً في (٠ ، ١) مهما اختلف مقدار أساسه مثل:

$ق(س) = ٢^{-س}$ ، $ق(س) = ٣^{-س}$ ، $ق(س) = ٤^{-س}$ ، ... إلخ

(٣) اقتران واحد لواحد (اختبار الخط الأفقي)

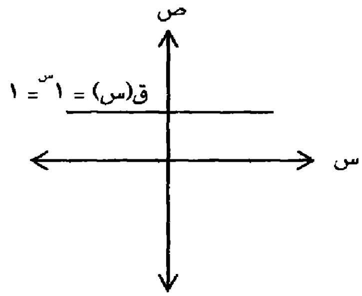
(٤) تتناقص قيمة ق(س) با زدياد قيم المتغير لذا فإنه يسمى اقتران متناقص أو نازل

(بهذه الميزة فقط يختلف عن $ق(س) = ٢^{س}$)

بعد أن مثلنا الاقتران ق(س) = $٢^{س}$ والاقتران $(\frac{١}{٢})^{س}$، على المستوى الديكارتي ، نستطيع الإجابة عن هذا السؤال:

لماذا يعرف ق(س) = $أ^{س}$، أ $\neq$ ١؟

الجواب لأنه عندما أ = ١ يصبح الاقتران الأسي ق(س) = $١^{س}$ = ١ (حسب قوانين الأسس) (١ مرفوعاً لأي أس يبقى ١ فقط)



ويصبح منحناه كما في الشكل

ويبقى منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ١)

ولكنه يفقد صفة التناقص أو التزايد

ويصبح موازياً لمحور السينات فقط.

من كل ما سبق نستنتج خصائص الاقتران الأسي ق(س) = $أ^{س}$، أ > صفر، أ $\neq$ ١، س $\in$ ح كما يلي:

(١) مجاله ح (جميع الأعداد الحقيقية سالبة وصفر وموجبة)

(٢) مداه $ح^{+}$ (الأعداد الحقيقية الموجبة فقط) كونه يقع فوق محور السينات ولا يقطعه على الإطلاق.

وكأنه اقتران ق(س): ح ⟵ $ح^{+}$

(٣) يمر دائماً بالنقطة (٠ ، ١) أي أن مقطعه الصادي دائماً ١ صحيح.

(٤) يكون متزايداً عندما أ > ١

ومتناقصاً عندما ٠ < أ < ١

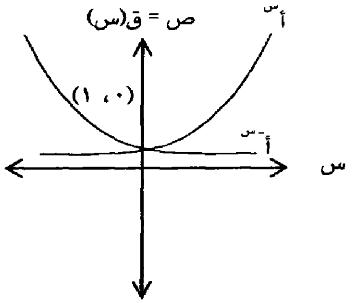
(٥) اقتران واحد لواحد أي كل عنصر في مجاله له صورة واحدة فقط في مداه لا يشترك مع عنصر آخر فيها.

والآن العلاقة بين منحنى كل من الاقترانين

$ق_١$س = $أ^{س}$ ، أ > ١

ق$_{٢}$س = أ^{س} ، ٠ < أ < ١ عند تمثيلها على المستوى الديكارتي؟

الشكل المجاور يُجيب



نلاحظ أن منحنى ق$_{١}$س انعكاس لمنحنى ق$_{٢}$س في محور الصادات

أو ق$_{١}$(س) $\xrightarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس}}$ ق$_{٢}$(س) والعكس أيضا صواب

أي أن ق$_{٢}$(س) $\xrightarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس}}$ ق$_{١}$(س)

⇦ مثال: مثّل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٥^{-س} ، & -٥ \le س \le ٠ \\ ٥^{س} ، & ٠ \le س \le ٥ \end{cases}$

ثم جد مجاله ومداه ومقطعه الصادي أيضاً

نقوم أولاً ببناء الجدول التالي:

س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	∴	١	٢	٣	٤	٥
ق(س)	٣١٢٥	٦٢٥	١٢٥	٢٥	٥	١	٥	٢٥	١٢٥	٦٢٥	٣١٢٥

ق(-٥) = ٥$^{-(-٥)}$ = ٥^{٥} = ٣١٢٥

ق(-٤) = ٥$^{-(-٤)}$ = ٥^{٤} = ٦٢٥

ق(-٣) = ٥$^{-(-٣)}$ = ٥^{٣} = ١٢٥ ⎫ ق(س) = ٥$^{-س}$

ق(-٢) = ٥$^{-(-٢)}$ = ٥^{٢} = ٢٥

ق(-١) = ٥$^{-(-١)}$ = ٥^{١} = ٥

ق(٠) = ٥$^{-٠}$ = ٥^{٠} = ١ (تعريف)

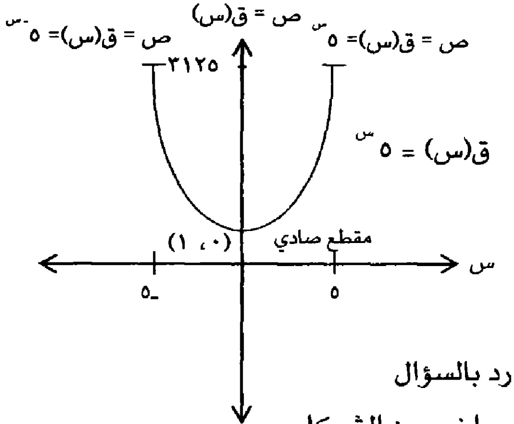
ق(١) = ٥^{١} = ٥

ق(٢) = ٥^{٢} = ٢٥

ق(٣) = ٥^{٣} = ١٢٥

ق(٤) = ٥^{٤} = ٦٢٥

ق(٥) = ٥^{٥} = ٣١٢٥



مجال: [-٥ ، ٥] كما هو وارد بالسؤال

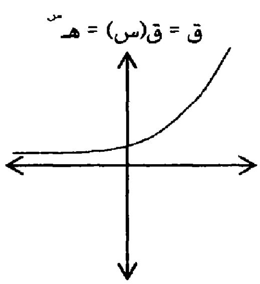
مداه: [١ ، ٣١٢٥] كما هو واضح من الشكل

مقطعه الصادي = ١ «ولا يقطع منحناه محور السينات إطلاقاً»

«الاقتران الأسي الطبيعي» Natural Expontial Function

جميع الاقترانات الأسية لها أهمية في الرياضيات، ولكن الاقتران الأسي الطبيعي له الأهمية القصوى من بينها كما سيتضح فيما بعد، والاقتران الأسي الطبيعي هو اقتران أساسه العدد النابييري هـ نسبة إلى العالم البريطاني نابيير (١٥٥٠ - ١٦١٧)م.

والعدد هـ أو العدد النابييري ليس عدداً نسبياً وإنما حقيقياً وقيمته تساوي تقريباً ٢,٧٢ لأقرب منزلتين عشريتين، وكل اقتران أُسي أساسه العدد هـ يسمى اقتراناً أسياً طبيعياً ويظهر بصورة: ق(س) = هـ^{س}، س ∈ ح، هـ ≈ ٢,٧٢ ومنحناه يشبه إلى حد ما منحنى الاقتران الأسي ق(س) = أ^{س} ، أ > ١ وله نفس ميزات الاقترانات الأسية الأخرى، إذ يمر منحناه بالنقطة (٠ ، ١) لأن ق(٠) = هـ^{٠} = ١ وكما في الشكل



مجاله ح

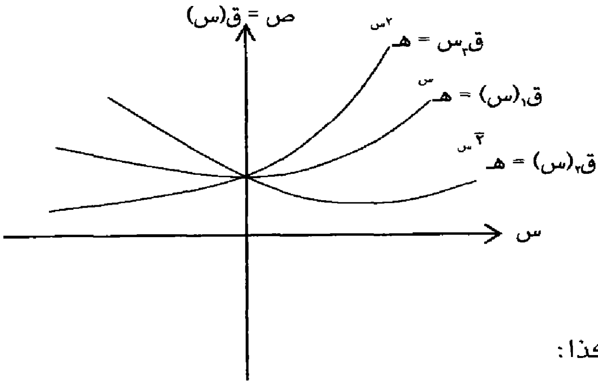
ومداه $ح^+$

ومقطعه الصادي = ١

وكفافة ق(س): ح ⟵ $ح^+$ وهو اقتران واحد لواحد

وباستخدام الآلات الحاسبة والكمبيوتر يمكن تمثيل أشكال أخرى للاقتران الأسي الطبيعي باختلاف الأس فقط وليس الأساس كونه أساس ثابت هو هـ ≈ ٢,٧٢ مثل:

$ق_١$(س) = $هـ^{٢س}$ ، $ق_٢$(س) = $هـ^{\frac{١}{٢}س}$ كما في الشكل المجاور وغيرها من الأشكال



وهكذا:

وتتساوى جميعها بالميزات التالية:

مجالها: ح

ومداها: $ح^+$

وتقطع كل منها الصادي = ١

وجميعها اقترانات من نوع واحد لواحد

وكأنها ق(س): ح ⟵ $ح^+$.

(١٢ - ٣) المعادلات والمتطابقات الأسية

أولاً: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلة الأسية: جملة مفتوحة مكونة من طرفين متساويين، تحتوي أُسس لمتغير واحد أو لعدة متغيرات.

وهناك قاعدة خاصة لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة الأسية تستخدم أحياناً مفادها عندما يتساوى الطرفان والأساسات لمعادلة واحدة تتساوى الأسس كما يلي:

وبالرموز: $أ^{س} = أ^{ص} \longrightarrow س = ص$

ويمكن إيجاد مجموعة الحل للمعادلات الأسية بالاستعانة بطرق التحليل إلى العوامل كما يلي:

⇦ مثال١: حل المعادلة الأسية:

$٥^{٢س} = ٦٢٥$ بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامله الأولية

٦٢٥	٥
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

$\therefore ٥^{٢س} = ٥^{٤}$

منها ٢س = ٤

س = ٢

وبالتحقق من صحة الحل:

$٥^{٢(٢)} = ٦٢٥ \longrightarrow ٥^{٤} = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٦٢٥$ كما ورد بالسؤال

⇦ مثال٢: حل المعادلة الأسية:

$٣^{٢س + ١} \times ٣^{٤س + ٧} = ٩$ باستخدام قوانين الأسس نجعل الطرف الأيمن واحداً

$٣^{٢س + ١} \times ٣^{٤س + ٧} = ٣^{٢س + ١ + ٤س + ٧} = ٣^{٦س + ٨} = ٩$

$\therefore ٣^{٦س + ٨} = ٣^{٢}$ منها

٦س + ٨ = ٢

- ٨   - ٨

٦س = - ٦

س = - ١ (تحقق من صحة المعادلة

⇦ مثال٣: حل المعادلة الأسية:

$٤^{س} - (١٧) (٢^{س}) + ١٦ =$ صفر حسب قوانين الأسس فنجعل الأساسات متساوية

هكذا:

$(٢^{٢س}) - (١٧)(٢^{س}) + ١٦ = $ صفر

$(٢^{س} - ١٦)(٢^{س} - ١) = $ صفر

∴ $٢^{س} = ١٦ \longrightarrow ٢^{س} = ٢^{٤} \longrightarrow$ س = ٤ الحل الأول

$٢^{س} = ١ \longrightarrow ٢^{س} = ٢^{٠} \longrightarrow$ س = صفر الحل الثاني

مجموعة الحل = {٠ ، ٤}

⇦ مثال: حل المعادلة

$٣٢ (١+س)^{٥} = ٣١٢٥$

نحول الأعداد ٣٢، ٣١٢٥ (إلى الصورة الأسية) هكذا:

$٢^{٥} (١+س)^{٥} = ٥^{٥}$ وبأخذ الجذر الخاص للطرفين

$\sqrt[٥]{٢^{٥} (١+س)^{٥}} = \sqrt[٥]{٥^{٥}}$

ومنه ٢(١+ س) = ٥

٢+ ٢س = ٥

-٢   -٢

٢س = ٣

س = $\frac{٣}{٢}$

مجموعة الحل = $\{\frac{٣}{٢}\}$ تحقق من صحة الحل

وهذا لا يمنع من وجود أنظمة من المعادلات الأسية بمتغيرين، لذا سنجد مجموعة الحل للنظام $٢^{س} + ٣^{ص} = ٣٥$

$٢^{س} - ٣^{ص} = ٢٩$ على سبيل المثال فقط:

نستخدم الحذف في حل النظام هكذا:

$٢^{س} + ٣^{ص} = ٣٥ \longleftarrow$ (١)

$٢^{س} - ٣^{ص} = ٢٩ \longleftarrow$ (٢) جمعاً

$٢^{س} + ٢^{س} = ٦٤$

$\frac{٢}{٢}(٢^{س}) = \frac{٦٤}{٢}$

$٢^{س} = ٣٢$ معادلة النسبة وتحليل الطرف الأيسر

$٢^{س} = ٢^{٥}$

ومنها س = ٥

وبالتعويض في المعادلة الأولى

$٢^{س} + ٣^{ص} = ٣٥$

$٢^{٥} + ٣^{ص} = ٣٥$

$٣٢ + ٣^{ص} = ٣٥$

$٣^{ص} = ٣^{١}$

ومنها ص = ١

مجموعة الحل {٥، ١}   تحقق من صحة الحل.

⇦ مثال: حل المعادلة $٧^{س+١} = ٢^{س+١}$

الأساسات ٧، ٢ لن يتساويا إلا إذا كان الأس صفر هكذا

$(٧)^{صفر} = (٢)^{صفر}$ ← لأن كلاً منهما = ١

∴ س + ١ = صفر

س = -١

مجموعة الحل = {-١}   التحقق: $٧^{-١+١} \overset{؟}{=} ٢^{-١+١}$

$٧^{٠} = ٢^{٠} = ١$ كما ورد بالسؤال

⇦ مثال: حل المعادلة $٧^{س} + ٧^{٢-س} = ٥٠$

لتحويل المعادلة إلى الصورة التربيعية فإننا نضرب طرفيها بالكمية $٧^{س} \neq$ صفر

حيث كانت س.

أي $٧^{س}(٧^{س} + ٧^{٢-س}) = ٥٠$

$(٧^{س})^{٢} + ٧^{س} \times ٧^{٢-س} = ٥٠\,(٧^{س})$

$(٧^{س})^{٢} + ٧^{٢} = ٥٠\,(٧^{س})$

أي $(٧^{س})^{٢} - ٥٠\,(٧^{س}) + ٤٩ =$ صفر

$(٧^{س} - ١)\,(٧^{س} - ٤٩) =$ صفر

ومنها $٧^{س} = ١$ ← $٧^{س} = ٧^{٠}$ ← س = صفر

$٧^{س} = ٤٩$ ← $٧^{س} = ٧^{٢}$ ← س = ٢

مجموعة الحل = { ٠ ، ٢ }.

ثانياً: المتطابقات الأسية Exponential Identity

يمكن القول أن المتطابقة الأسية هي معادلة أسية (طرفان متساويان) ولكن مجموعة حلها جميع الأعداد الحقيقية والملاحظ أنه لا يُطلب إيجاد مجموعة حلها كونها مجموعة عديدة العناصر وإنما يطلب إثبات صحتها أي ان الطرفين متساويان كما يلي:

⇦ مثال: بين صحة المتطابقة الأسية:

$\sqrt{(٢٥)^{؟} - ٢ \times ١٥^{؟} + ٩^{؟}} = ٥^{؟} - ٣^{؟}$

الطرف الأيسر = $\sqrt{(٥^{؟})^{٢} - ٢ \times ١٥^{؟} + (٣^{؟})^{٢}} = \sqrt{(٥^{؟} - ٣^{؟})\,(٥^{؟} - ٣^{؟})}$

$= \sqrt{(٥^{؟} - ٣^{؟})^{٢}} = ٥^{؟} - ٣^{؟}$

= الطرف الأيسر.

(١٢ ـ ٤) اللوغارتمات Logarithms

وجدت اللوغارتمات لتسهيل العمليات الحسابية المعقدة في الرياضيات، والآن أنظر ما كتبه الرياضي البريطاني نابيير (١٥٥٠ ـ ١٦١٧) عام ١٦١٤م في كتاب له عن السبب الذي من أجله فكر في ابتكار اللوغارتمات، كتب يقول:

«لقد رأيت أن لا شيء أكثر إزعاجاً وأشد ضجراً في الرياضيات من عمليات الضرب والقسمة والجذور والقوى على الأعداد الحقيقية الكبيرة، وتأكدت بأن هذه العمليات تعتبر مضيعة للوقت وعرضة للأخطاء لذلك بدأت التفكير بطريقة مفيدة لإزالة هذه العوائق من أمام الدارسين للرياضيات "فكانت اللوغاريتمات" ولكن في عصرنا الحالي، عصر العلم والتكنولوجيا وبعد اختراع الحاسوب والآلات الحاسبة أخذت أهمية اللوغاريتمات بالتناقص وقلت استعمالاتها في مجالات العلوم ومع كل هذا وذاك فلا تزال اللوغاريتمات تُدرس في مدارسنا والجامعات كونها مهمة في الرياضيات البحتة والتطبيقية على السواء حيث اقتراناتها تصف منحنيات النمو في العلوم البيولوجية وقوانينها تساعد على حساب الفوائد المركبة في التجارة والاقتصاد، وأخيراً يجب الاعتراف بفضل علماء العرب والمسلمين في تطوير قوانين الأسس واللوغاريتمات وعلى وجه الخصوص الخوارزمي (٧٨٠ ـ ٨٥٠)م، الذي ابتكر اللوغاريتمات فنسبت إليه».

هل تعلم قارئي العزيز أن الأس واللوغاريتم اسمان لمسمى واحد فالأس هو اللوغاريتم واللوغاريتم هو الأس، كيف ذلك يكون؟

أنظر إلى هذه السطور:

بعد أن أصبح من المعلوم أن ١٦ = $٢^{٤}$ حيث العدد ٤ هو الأس فإننا نسمي الصورة ١٦ = $٢^{٤}$ الصورة الأسية للعدد ١٦.

ولبيان أهمية الأس «العدد ٤» فإننا سنجعله مستقلاً وفي طرف واحد أي

سنجعله موضوع القانون كما يلي:

بما أن $١٦ = ٢^{٤}$

فإن لو$_{٢}$ ١٦= ٤ عندها سمي الأس ٤ باللوغاريتم

(حيث لو اختصاراً لكلمة لوغارتم)

وتسمى الصورة لو$_{٢}$ ١٦= ٤ الصورة اللوغاريتمية للعدد ١٦ وهكذا فالعدد ٤ هو الأس تارة واللوغاريتم تارة أخرى.

وأما العدد ٢ فيبقى الأساس في الصورتين الأسية واللوغاريتمية وبشكل عام

إذا كان $ص = س^{ن}$ الصورة الأسية

فإن لو$_{س}$ ص = ن الصورة اللوغاريتمية

والأس ن هو نفسه اللوغاريتم ن كما ترى.

والصورتان الأسية واللوغاريتمية متكاملتان مهمتان كما سترى.

والسؤال الآن: ما العلاقة بين الصورتين الأسية واللوغارتمية، وكيفية استخدام أحدهما لتبسيط الصورة الأخرى؟

فإذا كان $١٢٥ = ٥^{٣}$ الصورة الأسية والناتجة من تحليل العدد ١٢٥ إلى عوامله الأولية

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

فإن لو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣ الصورة اللوغاريتمية

⇦ مثال: ما قيمة لو$_{٧}$ ٣٤٣ ؟

نفرض أن لو$_{٧}$ ٣٤٣ = س ثم نحول الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية هكذا:

٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

$٧^{س} = ٣٤٣$ وبذلك أصبحت معادلة أسية

وبعد تحليل العدد ٣٤٣ ووضعه بصورة أسية هكذا

$\therefore ٧^{س} = ٧^{٣}$

ومنه س = ٣

∴ $\text{لو}_{٧}\ ٣٤٣ = ٣.$

⬅ مثال: ما قيمة $\text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٣٢}$ ؟

نفرض أن $\text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٣٢} = \text{س}$ ثم نحول الصورة اللوغاريتمية الأسية هكذا:

$$٢^{\text{س}} = \frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٢^{٥}} = ٢^{-٥}$$

$$\therefore ٢^{\text{س}} = ٢^{-٥}$$

ومنه: س = ـ٥

$$\text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٣٢} = -٥$$

⬅ مثال: ما قيمة $\text{لو}_{\frac{٢}{٣}}\ \frac{١٦}{٢٧}$ ؟

نفرض أن $\text{لو}_{\frac{٢}{٣}}\ \frac{١٦}{٨١} = \text{س}$ ثم تحويل الصورة اللوغاريتمية إلى أسية هكذا:

$$\frac{١٦}{٨١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}}$$

$$\therefore \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}$$

$$\therefore \text{لو}_{\frac{٢}{٣}}\ \frac{١٦}{٨١} = ٤$$

١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

٨١	٣
٢٧	٣
٩	٣
١	٣

نُلاحظ أن الأساس «أ» في $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{ص} = \text{س}$، عدد حقيقي موجب والأغلب أن يكون عدد طبيعي ولكن من أكثر الأساسات انتشاراً واستعمالاً هو الأساس ١٠ لذا أنظر إلى الملحوظة التالية:

🗋 ملحوظة:

يمكن كتابة $\text{لو}_{١٠}\ \text{ص}$ هكذا لوص دون وضع الأساس ١٠، كون الأساس

١٠ أصبح معلوماً لدى جميع الدارسات والدارسين، لكونه أصبح من أكثر الأساسات شيوعاً في اللوغاريتمات، واللوغاريتمات التي أساسها ١٠ تسمى اللوغاريتمات العادية أو الاعتيادية وتكتب لوص دون ذكر للأساس إطلاقاً.

وفي الآلات الحاسبة والكمبيوترات يكتب لوس هكذا Log X.

⇦ مثال: ما قيمة لو ٠,٠٠١ ؟

نفرض أن لو ٠,٠٠١ = س ثم نحول الصورة اللوغاريتمية إلى الأسية

وبما أن $لو_{١٠}$ ٠,٠٠١ = س ⟵⟶ $١٠^{س}$ = ٠,٠٠١ = $١٠^{-٣}$ (الأسس)

(كون ٠,٠٠١ = $\frac{١}{١٠٠٠}$ = $\frac{١}{١٠^{٣}}$ = $١٠^{-٣}$)

أي أن: س = -٣

∴ لو ٠,٠٠١ = -٣

وفي هذا السياق وعلى نفس المنوال نود أن نكتب لوغاريتمات بعض الأعداد للأساس (١٠) كما يلي:

لو ٠,٠٠١ = لو$١٠^{-٣}$ = -٣ (من قوانين الأسس كما مر أعلاه)

لو ٠,٠١ = لو$١٠^{-٢}$ = -٢

لو ٠,١ = لو$١٠^{-١}$ = -١

لو ١ = لو$١٠^{٠}$ = صفر (١= ($١٠^{٠}$) تعريف)

لو ١٠ = لو$١٠^{١}$ = ١

لو ١٠٠ = لو$١٠^{٢}$ = ٢

لو ١٠٠٠ = لو$١٠^{٣}$ = ٣ وهكذا.

ولو عدنا إلى:

لو ١ = لو$١٠^{٠}$ = صفر

لو ١٠ = لو$١٠^{١}$ = ١

فإن لو س حين {١≤ س ≤ ١٠} عدد ينتمي إلى الفترة [٠ ، ١]

وهذا مفتاح جداول اللوغاريتمات، لكننا هنا بالذات لن نستخدمها إنما سنستخدم بدائلها وهي الآلات الحاسبة والكمبيوترات لإيجاد اللوغاريتمات لأننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، لذا وجب علينا استخدام مثل هذه الآلات.

(١٢ ـ ٥) قوانين اللوغاريتمات

سندون هذه القوانين في مؤلفنا هذا بلا إثباتات ولا براهين ولكن مع البيان بالأمثلة العددية فقط حتى لا ندخل في خانة الغموض والتعقيد كوننا نفترض البساطة والدقة لأنهما مطلبنا الوحيد في هذا المؤلف الصغير.

إذا كانت أ، س، ص أعداد حقيقية موجبة، أ ≠ ١، ؟ ∋ ح فإن:

أولاً: لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص وكأنه تفريق اللوغاريتم الواحد.

والعكس أيضاً صواب أي أن:

لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س ص وكأنه تجمع اللوغاريتمات

⇦ مثال: لو$_{٢}$ ٦٤ = لو$_{٢}$ (٤ × ١٦) = لو$_{٢}$ ٤+ لو$_{٢}$ ١٦

الطرف الأيمن:

والتفسير: لو$_{٢}$ ٦٤ = س ⟵ $٢^{س}$ = $٢^{٦}$ ⟵ س = ٦

الطرف الأيسر:

وكذلك لو$_{٢}$ ٤ = ص ⟵ $٢^{ص}$ = ٤ ⟵ $٢^{ص}$ = $٢^{٢}$ ⟵ ص = ٢

وكذلك لو$_{٢}$ ١٦ = ع ⟵ $٢^{ع}$ = ١٦ ⟵ $٢^{ع}$ = $٢^{٤}$ ⟵ ع = ٤

ومن البداهة أن ٦ = ٢ + ٤

ثانياً: لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص وكأنه تفريق اللوغاريتم الواحد.

والعكس أيضاً صواب أي أن؛

لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ وكأنه لجميع اللوغاريتمات.

⇦ مثال: لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{٢٧}$ = لو$_{٣}$ ٢٤٣ - لو$_{٣}$ ٢٧

والتفسير: الطرف الأيمن؛ لو$_{٣}$ $\frac{٢٤٣}{٢٧}$ = لو$_{٣}$ ٩ = لو$_{٣}$ ٣^{٢} = ٢ بعد تحويلها إلى الصورة الأسية.

الطرف الأيسر: لو$_{٣}$ ٢٤٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٥} = ٥ بعد تحويلها إلى الصورة الأسية.

وكذلك: لو$_{٣}$ ٢٧ = لو$_{٣}$ ٣^{٣} = ٣ بعد تحويلها إلى الصورة الأسية.

أي أن ٢ = ٥ – ٣.

وثالثاً: لو$_{أ}$ س$^{؟}$ = ؟ لو$_{أ}$ س

⇦ مثال: لو$_{٥}$ (٢٥)^{٣} = ٣ لو$_{٥}$ ٢٥ = ٣ لو$_{٥}$ ٥^{٢} = ٣ × ٢ = ٦ بعد تحويلها إلى الصورة الأسية.

رابعاً: لو$_{أ}$ أ = ١

والتفسير لو$_{أ}$ أ = س ⟵ أ^{١} = أ^{س} ⟵ س = ١

⇦ مثال: لو$_{٥}$ ٥ = ١ ⟵ كون ٥ = ٥^{١} وهكذا.

خامساً: لو$_{أ}$ ١ = صفر

والتفسير: لو$_{أ}$ ١ = س ⟵ ١ = أ^{س} = أ^{٠} = ١ دائماً

سادساً: لو$_{أ}$ أ^{س} = س

والتفسير: $لو_{أ}\ أ^{س} = س\ لو_{أ}\ أ = س\ (١) = س$

⇦ مثال: $لو_{٥}\ ٥^{٢} = ٢\ لو_{٥}\ ٥ = ٢\ (١) = ٢$

سابعاً: إذا كان $لو_{أ}\ س = لو_{أ}\ ص$ ← فإن س = ص

⇦ مثال: بما أن $لو_{٢}\ ١٦ = لو_{٢}\ ٢ \times ٨$ ← فإن $١٦ = ٢ \times ٨ = ١٦$

ثامناً: $لو_{أ}\ \frac{١}{س} = -\ لو_{أ}\ س$

والتفسير اللغوي: لوغاريتم مقلوب العدد الحقيقي يكافئ سالب لوغارتم العدد الحقيقي نفسه.

والتفسير: $لو_{أ}\ \frac{١}{س} = لو_{أ}\ ١ - لو_{أ}\ س$ (من قوانين اللوغاريتمات)

$= صفر\ - لو_{أ}\ س = - لو_{أ}\ س$

⇦ مثال: $لو_{٥}\ \frac{١}{٢٥} = -\ لو_{٥}\ ٢٥ = -\ لو_{٥}\ ٥^{٢} = -٢ لو_{٥}\ ٥ = -\ ٢\ (١) = -\ ٢$

أو لأن $لو_{٥}\ \frac{١}{٢٥} = لو_{٥}\ ١ - لو_{٥}\ ٢٥ = صفر - لو_{٥}\ ٢٥ = -٢ لو_{٥}\ ٥ = -\ ٢\ (١) = -\ ٢$

تاسعاً: $لو_{ص}\ س = \frac{١}{لو_{س}\ ص}$

والتفسير اللغوي: لقد أبدلنا الكمية (س) بالأساس (ص) والعكس.

⇦ مثال: $لو_{٤}\ ١٦ = \frac{١}{لو_{١٦}\ ٤}$

والبيان: الطرف الأيمن = $لو_{٤}\ ١٦ = لو_{٤}\ ٤^{٢} = ٢\ لو_{٤}\ ٤ - ٢\ (١) = ٢$

الطرف الأيسر: نفرض أن $لو_{١٦}\ ٤ = س$ تم تحويلها إلى الصورة الأسية

∴ $لو_{١٦}\ ٤ = س$ ← $١٦^{س} = ٤$

← $(٤^{٢})^{س} = ٤$

← $٤^{٢س} = ٤^{١}$

∴ ٢س = ١

∴ س = $\frac{١}{٢}$

وبما أن الطرف الأيسر = $\frac{١}{لو_{١٦}\ ٤}$ = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ١ × $\frac{٢}{١}$ = ٢

∴ الطرفان متساويان

أي أن لو$_{٤}$ ١٦ = $\frac{١}{لو_{١٦}\ ٤}$

عاشراً: لو$_{ص}$ س× لو$_{ع}$ ص = لو$_{ع}$ س ، لكل س، ص، ع أعداد حقيقية، ص، ع $\neq$ ١

والشرط الكافي لهذا القانون أن يكون: أساس اللوغاريتم الأول (ص) = كمية اللوغاريتم الثاني (ص)

والبيان لو$_{٨}$ ٦٤ × لو$_{٢}$ ٨ = لو$_{٢}$ ٦٤

الطرف الأيمن: لو$_{٨}$ ٦٤ = لو$_{٨}$ ٨^{٢} = ٢

لو$_{٢}$ ٨^{٢} = لو$_{٢}$ ٢^{٣} = ٣

٢ × ٣ = ٦

الطرف الأيسر: لو$_{٢}$ ٦٤= لو$_{٢}$ ٢^{٦} = ٦

فالطرفان متساويان

هذا القانون يُستخدم لتحويل اللوغاريتم لأي أساس إلى الأساس ١٠ على سبيل المثال لإيجاد قيمته هكذا:

⇦ مثال: حوّل اللوغارتم لو$_{٥}$ ١٤ إلى الأساس ١٠ وأوجد قيمته؟

الحل:

لو$_{٥}$ ١٤ × لو$_{١٠}$ ٥ = لو$_{١٠}$ ١٤ (من القانون السابق أعلاه)

وهذا أصبح كمعادلة منها:

$$\text{لو}_{\text{٥}}\ \text{١٤} = \frac{\text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{١٤}}{\text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{٥}} = \frac{\text{لو١٤}}{\text{لو٥}}$$

والتحويل مباشرة واستعانة بالآلات الحاسبة:

$$\text{لو}_{\text{٥}}\ \text{١٤} = \frac{\text{لو١٤}}{\text{لو٥}} = \frac{\text{١،١٤٦}}{\text{٠،٦٩٩}} = \frac{\text{١١٤٦}}{\text{٦٩٩}} = \text{١،٦٣٩}$$

وبشكل عام للتحويل إلى لوغاريتمات للأساس ١٠ نقول

$$\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \frac{\text{لوس}}{\text{لو ص}} \quad \text{(مباشرة)}$$

⇦ مثال: ما قيمة $\text{لو}_{\text{١١}}\ \text{٢٩}$ ؟

$\text{لو}_{\text{١١}}\ \text{٢٩} = \frac{\text{لو٢٩}}{\text{لو ١١}}$ ومن جداول اللوغاريتمات أو الآلة الحاسبة

$$= \frac{\text{١،٤٦٢٤}}{\text{١،٠٤١٤}} = \frac{\text{١٤٦٢٤}}{\text{١٤١٤}}$$

$$= \text{١٠،٣ تقريباً}$$

وكذلك للتحويل إلى الأساس هـ = ٢،٧٢ العدد النابييري

⇦ مثال: $\text{لو}_{\text{٧}}\ \text{١٥} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{١٥}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٧}} =$ وباستخدام الآلات الحاسبة نتمم الحل إذا شئنا

وكذلك $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٥} = \frac{\text{لو٥}}{\text{لو هـ}}$ للأساس ١٠

$$\text{لو٧} = \text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{٧} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٧}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{١٠}}$$

وكذلك $\text{لو}_{\text{٢}}\ \text{هـ} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{٢}}$ وهكذا

وبشكل عام: هنالك في اللوغاريتمات تحويلان

الأول إلى الأساس ١٠ كما يلي: $\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{ص}} = \frac{\text{لوس}}{\text{لوص}}$

الثاني إلى الأساس هـ كما يلي: $\text{لو}_{\text{ص}}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}$

أمثلة محلولة على قوانين اللوغاريتمات:

⇦ مثال: إذا كان لو٢ = ٠,٣

لو٣ = ٠,٥

لو٧ = ٠,٨

وجميعها للأساس ١٠

أوجد لو ٤,٢ = لو $\frac{٤٢}{١٠}$ = لو٤٢ – لو١٠ = لو٢ × ٣ × ٧ – ١

= لو٢ + لو٣ + لو٧ - ١ = ٠,٣ + ٠,٥ + ٠,٨ - ١ = ١,٦ - ١ = ٠,٦

⇦ مثال: أوجد $\text{لو}_{٥}$ ٣١٢٥ ، $\text{لو}_{٢}$ $\frac{١}{١٢٨}$ ، لو ٠,٠٠٠١

أولاً: $\text{لو}_{٥}$ ٣١٢٥ = س ⟵ $٥^{\text{س}}$ = ٣١٢٥ والتحويل إلى الصورة الأسية أصبحت معادلة أسية.

$٥^{\text{س}}$ = $٥^{٥}$ بعد تحليل العدد ٣١٢٥ إلى عوامله الأولية

ومنها س = ٥

أو ∴ $\text{لو}_{٥}$ ٣١٢٥ = $\text{لو}_{٥}$ $٥^{٥}$ = ٥ $\text{لو}_{٥}$ ٥ = ٥ (١) = ٥

ثانياً: $\text{لو}_{٢}$ $\frac{١}{١٢٨}$ = $\text{لو}_{٢}$ $\frac{١}{٢^{٧}}$ بعد تحليل العدد ١٢٨ إلى عوامله الأولية

= $\text{لو}_{٢}$ $٢^{-٧}$ = - ٧ $\text{لو}_{٢}$ ٢ = - ٧ (١) = - ٧

ثالثاً: لو ٠,٠٠٠١ = $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$ = لو $\frac{١}{١٠^{٥}}$ = لو$١٠^{-٥}$ = - ٥ لو ١٠

= - ٥ (١) = - ٥

⇦ مثال: ما قيمة $\text{لو}_{٥}$ ٩ × $\text{لو}_{٣}$ ٢٥ والحل بأسلوبين أو طريقتين كما يلي:

الطريقة الأولى: $\text{لو}_{٥}\ ٩ \times \text{لو}_{٣}\ ٢٥ = \dfrac{\text{لو}٩}{\text{لو}٥} \times \dfrac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}٣}$

حسب قوانين اللوغاريتمات

$$\frac{\text{لو}٣^{٢}}{\text{لو}٥} \times \frac{\text{لو}٥^{٢}}{\text{لو}٣} = \frac{٢\text{لو}٣}{\text{لو}٥} \times \frac{٢\text{لو}٥}{\text{لو}٣} = ٢ \times ٢ = ٤$$

الطريقة الثانية: $\text{لو}_{٥}\ ٩ \times \text{لو}_{٣}\ ٢٥ = \text{لو}_{٥}\ ٣^{٢} \times \text{لو}_{٣}\ ٥^{٢} = ٢\text{لو}_{٥}\ ٣ \times ٢\text{لو}_{٣}\ ٥ = ٤\text{لو}_{٥}\ ٣ \times \text{لو}_{٣}\ ٥$

$= ٤\text{لو}_{٥}\ ٥ = ٤\ (١) = ٤$ نفس الجواب من الطريقتين

⇦ مثال:

أكتب ما يلي على صورة لوغاريتم واحد:

$$\text{لو}_{ص}\ (س^{٤} - ١) - \text{لو}_{ص}\ (س + ١) - \text{لو}_{ص}\ (س - ١)$$

$$= \text{لو}_{ص}\ \frac{س^{٤} - ١}{س + ١} - \text{لو}_{ص}\ (س - ١) = \text{لو}_{ص}\ \frac{(س^{٢} - ١)\ (س^{٢} + ١)}{س + ١} - \text{لو}_{ص}\ (س - ١)$$

$$\text{لو}_{ص}\ \frac{(س - ١)\ (س + ١)\ (س^{٢} + ١)}{س + ١} - \text{لو}_{ص}\ (س - ١)$$

$$\text{لو}_{ص}\ \frac{(س - ١)\ (س^{٢} + ١)}{س - ١} = \text{لو}_{ص}\ (س^{٢} + ١)$$ وهو المطلوب

⇦ مثال:

اختصر ما يلي لأبسط صورة دون وجود اللوغاريتم

$$٣\ \text{لو}_{٣}\ ٩ - \text{لو}_{٣}\ ٢٧ + \frac{١}{٩}\ \text{لو}_{٣}\ \sqrt{٨١}$$

$$= ٣\ \text{لو}_{٣}\ ٩ - \text{لو}_{٣}\ ٢٧ + \frac{١}{٩}\ \text{لو}_{٣}\ (٨١)^{\frac{١}{٢}}$$

$= ٣ \text{لو}_{٣} ٣^{٦} - \text{لو}_{٣} ٣^{٢} + \text{لو}_{٣} (٣^{٢})^{\frac{١}{٩}}$

$= ٦ - ٣ + \text{لو}_{٣} (٣)^{\frac{٢}{٩}}$

$= ٣ + \frac{٢}{٩} \text{لو}_{٣} ٣ = ٣ + \frac{٢}{٩} (١) = ٣ + \frac{٢}{٩}$

$= \frac{٢}{٩} ٣$ وهذا المطلوب

(١٢ - ٦) الاقتران اللوغاريتمي Logrithmic Funtion

سنناقش فيما يلي اقتران يعتمد على تعريف اللوغاريتم ويرتبط بالاقتران الأسي

ق(س) = $أ^{س}$ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١

إنه الاقتران اللوغاريتمي الذي يعرف على الشكل:

لكل س > صفر، أ ≠ ١ فإن:

ص = $\text{لو}_{أ}$ س إذا وفقط إذا كان س = $أ^{ص}$ الصورة الأسية للاقتران اللوغاريتمي

ولتمثيل منحنى الاقتران ص = $\text{لو}_{٢}$ س أو اقتران ق(س) = $\text{لو}_{٢}$ س بيانيا على المستوى الديكارتي نحول الصورة الأسية كما يلي:

ص = $\text{لو}_{٢}$ س ⟵ س = $٢^{ص}$

ونقوم ببناء الجدول التالي، وهنا نفرض ص للسهولة فقط

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص	-٢	-١	٠	١	٢

س = $٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$

$$س = ٢^{-١} = \frac{١}{٢^{١}} = \frac{١}{٢}$$

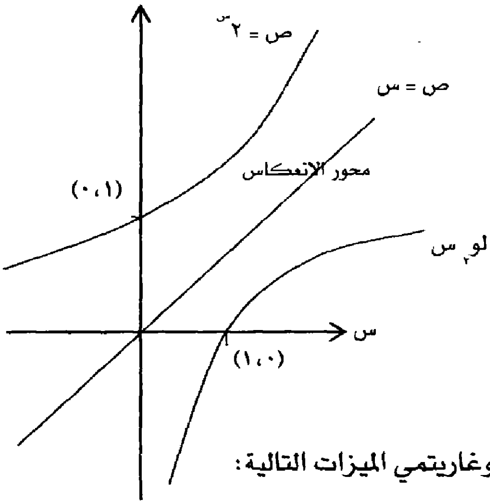
$$س = ٢^{٠} = ١$$

$$س = ٢^{١} = ٢$$

$$س = ٢^{٢} = ٤$$

وعند تمثيل الاقتران اللوغاريتمي ص = $لو_{٢}$ س

والاقتـران الأسـي ص = $٢^{س}$ معـاً وعلـى سـطح بيـاني واحـد يظهران كما في الشكل المجاور:



والملاحظ أن للاقتران اللوغاريتمي الميزات التالية:

(١) مجاله $ح^{+}$ ومداه ح

وهو اقتران واحد لواحد وعلى الصورة العامة: ق(س): $ح^{+}$ ⟵ ح

(٢) مقطعه السيني ١ حيث يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٠)

كون $لو_{٢}$ ١ = ص ⟵ ١= $٢^{ص}$ ⟵ ١= $٢^{٠}$ أي أن ص = صفر

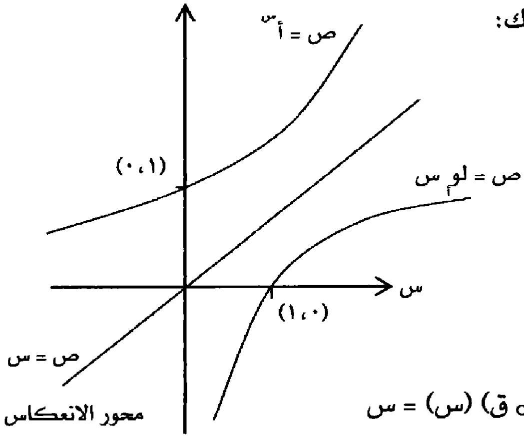
ومن الملاحظ أن منحنى ص = $لو_{٢}$ س هـو انعكـاس لمنحنـى ص= $٢^{س}$ بمحـور الانعكاس المستقيم ص = س كما هو واضح أعلاه.

وبشكل عام فإن الاقتران ق(س) = $لو_{أ}$ س، أ > صفر، أ $\neq$ ١

وعلى وجه الخصوص أ > ١ أو عدد صحيح

هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي ق(س) = $أ^{س}$

والشكل التالي يوضح ذلك:



والتفسير:

إذا كان ق(س) = $أ^{س}$

فإن $ق^{-١}$(س) $لو_{أ}$ س

والعكس صواب:

عندها فإن:

(ق ∘ $ق^{-١}$) (س) = ($ق^{-١}$ ∘ ق) (س) = س

والبيان هكذا:

(ق ∘ $ق^{-١}$) (س) = ($ق^{-١}$(س)) = ق ($لو_{أ}$ س) = $أ^{لو_{أ} س}$ = ع ومنه

وبأخذ اللوغاريتم إلى الطرفين

$لو_{أ}$ $أ^{لو_{أ} س}$ = $لو_{أ}$ ع

ومنه $لو_{أ}$ س $لو_{أ}$ أ = $لو_{أ}$ ع

∴ $لو_{أ}$ س= $لو_{أ}$ ع ⟵ س = ع

∴ (ق ∘ $ق^{-١}$) (س) = س

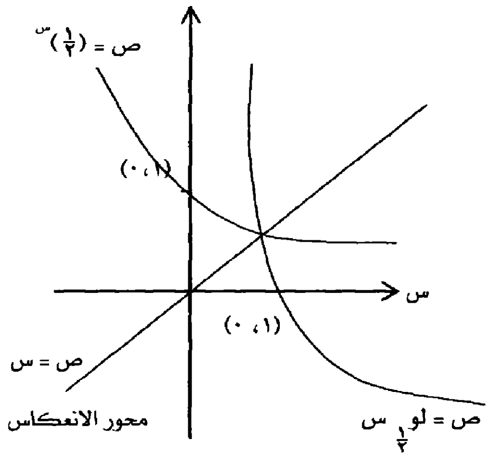
وكذلك (ق ∘ $ق^{-١}$) (س) = $ق^{-١}$(ق(س)) = $ق^{-١}$($أ^{س}$) = $لو_{أ}$ $أ^{س}$ = س

∴ الاقتران اللوغاريتمي اقتران عكسي للاقتران الأسي

والعكس: الاقتران الأسي اقتران عكسي للاقتران اللوغاريتمي.

ملحوظة جديرة بالاهتمام لا بد منها في هذا المكان:

بما أن أساس اللوغاريتم يفضل أن يكون عدداً صحيحاً (ولا مانع من أن يكون كسراً أو عددا نسبياً) لذلك لا حاجة لنا بالاقتران ق(س) = لو$_{\frac{1}{2}}$ س مع أنه اقتران عكسي للاقتران الأسي ق(س) = $(\frac{1}{2})^{س}$ ومنحناهما كما في الشكل.



الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي Natuural Logarithmic Function

إنه من الاقترانات اللوغارتمية الأكثر استخداماً في التطبيقات الحياتية كما سترى في هذا المؤلف بالذات.

والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي على الصورة ق(س) = لو$_{هـ}$ س حيث أساسه العدد النابييري هـ = ٢,٧٢ ويرمز له بالرمز ln في الآلة الحاسبة والكمبيوتر «إن شئت استخدام أياً منهما».

وحيث أن س > صفر دائماً

لذلك لتمثيل منحناه على السطح البياني ستكون أولاً الجدول الآتي:

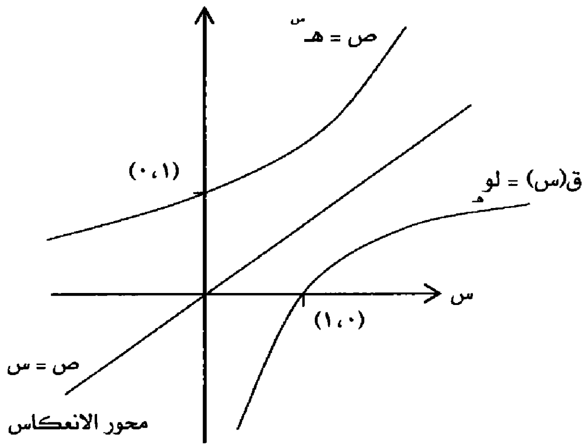
س	١	٢	٣	...
ق(س)	٠	٠,٧	١,١	...

ق(١) = لو$_{هـ}$ ١ = صفر (من قوانين الأسس)

ق(٢) = لو$_{هـ}$ ٢ = ٠,٧ تقريباً باستخدام الآلة الحاسبة.

ق(٣) = لو$_{هـ}$ ٣ = ١,١ تقريباً باستخدام الآلة الحاسبة.

وهكذا



والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لو$_{هـ}$ س

هو اقتران عكسي للاقتران الأسي الطبيعي ق(س) = هـ^{س} بمحور الانعكاس ص = س.

«تماماً كالاقترانات اللوغاريتمية والأسية الأخرى».

والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ص = لو$_{هـ}$ س له ميزات هي:

١. مجاله ح$^{+}$

٢. مداه ح

٣. مقطعه السيني = ١ وحدة.

٤. لا يقطع محو الصادات إطلاقاً

⇦ مثال: أوجد مجال كل من الاقترانات:

(١) ق(س) = لو$_{هـ}$ (س - ٣)

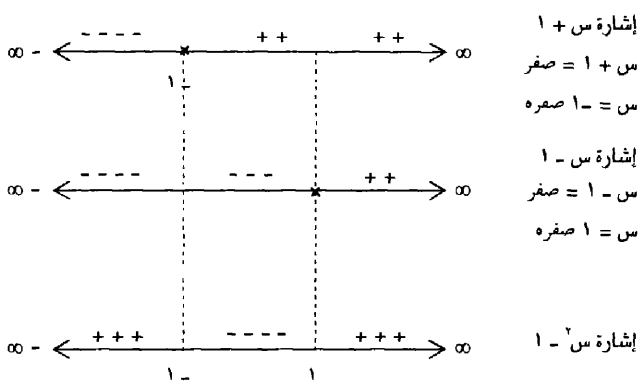
(٢) هـ(س) = لو$_{هـ}$ (س^{٢} - ١)

(٣) ل(س) = لو$_{هـ}$ (٧ - س)

مجال الأول س ـ ٣ > صفر ⟵ س > ٣ فمجاله (٣، ∞)

مجال الثاني: س^{٢} - ١> صفر⟵ (س + ١) (س - ١) > صفر

ونضرب الإشارات كما يلي:



مجال س^{٢} - ١> صفر هو (ـ ∞، - ١) ∪ (١، ∞)

مجال الثالث ٧ - س > صفر ⟵ (- س > -٧) ⟵ س < ٧ تغيير إشارة التباين فمجاله (ـ ∞، ٧).

المعادلات والمتطابقات اللوغاريتمية

أولاً: المعادلات اللوغاريتمية: Logarithmic Eqhations

المعادلة اللوغاريتمية: جملة مفتوحة مكونة من طرفين متساويين تحتوي لوغاريتمات لمتغير أو لعدد من المتغيرات.

وحل المعادلة اللوغاريتمية معناه إيجاد قيمة المتغير أو المتغيرات بالاستعانة بقوانين اللوغاريتمات وبتحويل الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية بعض الأوقات والعكس صواب إذ يمكن الاستعانة باللوغاريتمات لحل معادلات أسية كما في الأمثلة:

⇦ مثال: حل المعادلة لو$_{٣}$س + لو$_{٣}$(س − ٢) = ١

إنها معادلة لوغاريتمية يجب وضعها بصورة لوغاريتم واحد هكذا

لو$_{٣}$س (س − ٢) = ١ ثم تحويلها إلى الصورة الأسية هكذا:

س (س − ٢) = $٣^{١}$

س^{٢} − ٢س − ٣ = صفر

(س − ٣) (س + ١) = صفر

س = ٣ ، - ١

التحقق:

لو$_{٣}$ ٣ (٣ − ٢) = لو$_{٣}$ ٣ = ١ الجواب الأول صواب

لو$_{٣}$ - ١ (- ١ − ٢) = لو$_{٣}$ ٣ = ١ والجواب الثاني صواب

مجموعة الحل = {- ١ ، ٣} والجوابان يحققان المعادلة كما ترى.

⇦ مثال: حل المعادلة لو$_{هـ}$ ٢٧ = لو$_{هـ}$ ٨١ إنها معادلة لوغاريتمية تبسط هكذا:

لو$_{هـ}$ ٢٧ = لو$_{هـ}$ ٨١ ومنها ⟵ ٢٧^{س} = ٨١ لتساوي الأساسات

أصبحت أسية: $(٣^{٣})^{س}$ ⟵ $٣^{٤}$ = ٤ ⟵ س = $\frac{٤}{٣}$

مجموعة الحل = { $\frac{٤}{٣}$ }

تحقق من صحة الحل

⇦ مثال: حل المعادلة $٣^{\text{٢س - ٥}} = ٧^{\text{س - ١}}$

إنها أسية ولكن قوانين الأسس أصبحت بلا فائدة للحل لعدم قدرتها على تساوي الأساسات في الطرفين لذا نلجأ إلى اللوغاريتمات هكذا.

$$٣^{\text{٢س - ٥}} = ٧^{\text{س - ١}} \longleftarrow (\text{٢س} - ٥)\,\text{لو}٣ = (\text{س} - ١)\,\text{لو}٧$$

وبعد فك الأقواس:

$$\text{٢س لو٣} - \text{٥لو٣} = \text{س لو٧} - \text{لو٧}$$

$$\text{أي ٢س لو٣} - \text{س لو٧} = \text{٥ لو٣} - \text{لو٧}$$

$$\frac{\text{س (٢لو٣} - \text{لو٧)}}{\text{٢لو٣} - \text{لو٧}} = \frac{\text{٥لو٣} - \text{لو٧}}{\text{٢لو٣} - \text{لو٧}}$$

$\text{س} = \frac{\text{٥لو٣} - \text{لو٧}}{\text{٢لو٣} - \text{لو٧}}$ وباستعمال الآلة الحاسبة تحصل على

س = ١٤,١١٤

مجموعة الحل = {١٤,١١٤}

يمكن حل المعادلة باستخدام اللوغاريتمات ذات الأساس هـ.

ملحوظة:

وعلى سبيل المثال يمكن حل نظام من المعادلات اللوغاريتمية بمتغيرين هكذا:

أوجد مجموعة الحل للنظام

٢ لوس – ٣ لوص = لو٢ ← (١)

٢ لوس – ٢ لوص = لو٣ ← (٢)

استفادة من قوانين اللوغاريتمات تصبح المعادلات

$\text{لوس}^{٢} - \text{لوص}^{٣} = \text{لو٢}$ ← (١)

$\text{لوس}^{٢} - \text{لوص}^{٢} = \text{لو٣}$ ← (٢)

ونتابع التبسيط هكذا: بجعل الطرف الأيمن لوغاريتم واحد.

لو $\frac{س^٢}{ص^٢}$ = لو٢ وكذلك لو $\frac{س^٢}{ص^٣}$ = لو٣

ومنها: $\frac{س^٢}{ص^٣}$ = ٢ ⟵ أي أن $س^٢ = ٢ ص^٣$ ⟵ (١)

وكذلك لو $\frac{س^٢}{ص^٢}$ = لو٣ ⟵ أي أن $\frac{س^٢}{ص^٢}$ = ٣ (٢)

$س^٢ = ٢ ص^٣$ (١)

$س^٢ = ٣ ص^٢$ (٢)

∴ $٢ ص^٣ = ٣ ص^٢$

$٢ ص^٣ - ٣ ص^٢$ = صفر

$ص^٢ (٢ ص - ٣)$ = صفر

ص = صفر ، ص = $\frac{٣}{٢}$

↓

جواب مرفوض كون ص ≠ صفر حتى لا تصبح $\frac{س^٢}{ص^٢}$ غير معرفة

∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ قيمة ص.

لإيجاد قيمة س: نعوض: $س^٢ = ٢ ص^٣ = ٢ \times (\frac{٣}{٢})^٣ = ٢ \times \frac{٢٧}{٨} = \frac{٢٧}{٤}$

س = $\sqrt{\frac{٢٧}{٤}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ والجواب السالب مرفوض

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{٣}{٢}\}$ تحقق من صحة الحل

ثانياً: المتطابقات اللوغاريتمية Logarithmic Identities

كما أن هناك متطابقات أسية تحتاج لبيان صحتها، هنالك أيضاً متطابقات لوغاريتمية تحتاج لبيان صحتها أيضاً، وبنفس الأسلوب واستخدام قوانين

اللوغاريتمات نستطيع البيان كما يلي:

⇦ مثال: بين صحة المتطابقة $\text{لو}_{٨}\,٣٢ + \text{لو}_{٨}\,٢ = ٢$

الطرف الأيمن $= \text{لو}_{٨}\,٣٢ + \text{لو}_{٨}\,٢ = \text{لو}_{٨}\,٣٢ \times ٢ = \text{لو}_{٨}\,٦٤$ بعد تجميعها بلوغاريتم واحد.

$= \text{لو}_{٨}\,٨^{٢} = ٢\text{لو}_{٨}\,٨ = ٢\,(١) = ٢ =$ الطرف الأيسر.

⇦ مثال: بين صحة المتطابقة $\dfrac{\text{لو}_{م}\,٨ - ٣\,\text{لو}_{م}\,٩}{\text{لو}_{م}\,٤ - ٤\,\text{لو}_{م}\,٣} = \dfrac{٣}{٢}$

الطرف الأيمن: $\dfrac{\text{لو}_{م}\,٢^{٣} - ٣\,\text{لو}_{م}\,٣^{٢}}{\text{لو}_{م}\,٢^{٢} - ٤\,\text{لو}_{م}\,٣^{١}} = \dfrac{٣\,\text{لو}_{م}\,٢ - ٦\,\text{لو}_{م}\,٣}{٢\,\text{لو}_{م}\,٢ - ٤\,\text{لو}_{م}\,٣}$

$= \dfrac{٣\,\{\text{لو}_{م}\,٢ - ٢\,\text{لو}_{م}\,٣\}}{٢\,\{\text{لو}_{م}\,٢ - ٢\,\text{لو}_{م}\,٣\}} = \dfrac{٣}{٢} =$ الطرف الأيسر

⇦ مثال: بين صحة المتطابقة

$٢\,\{\text{لو}_{هـ}\sqrt{١٢٥} + \text{لو}_{هـ}\,٢٧ - \text{لو}_{هـ}\,١٠٠٠\} = \{\text{لو}_{هـ}\,٩ - \text{لو}_{هـ}\,٢\}$

الطرف الأيمن

$٢\,\{\text{لو}_{هـ}\sqrt{١٢٥} + \text{لو}_{هـ}\,٢٧ - \text{لو}_{هـ}\,١٠٠٠\}$ باستخدام قوانين اللوغاريتمات

$= ٢\{\text{لو}_{هـ}\,(\dfrac{\sqrt{١٢٥ \times ٢٧}}{\sqrt{١٠٠٠}})^{٢} = \text{لو}_{هـ}\,\dfrac{(٢٧)\,(٢٧) \times ١٢٥}{١٠٠٠}$ وبالتربيع

$= \text{لو}_{هـ}\,\dfrac{٢٧ \times ٢٧}{٨} = \text{لو}_{هـ}\,\dfrac{٣^{٣} \times ٣^{٣}}{٢^{٣}} = \text{لو}_{هـ}\,\dfrac{٣^{٦}}{٢^{٣}}$

$= \text{لو}_{هـ}\,\dfrac{٧٢٩}{٨}$

والطرف الأيسر: ٣{ لو$_{هـ}$ ٩ - لو$_{هـ}$ ٢}

= ٣{ لو$_{هـ}$ $\frac{٩}{٢}$ } = لو$_{هـ}$ $(\frac{٩}{٢})^{٣}$ = لو$_{هـ}$ $\frac{٩^{٣}}{٢^{٣}}$ = لو $\frac{٧٢٩}{٨}$

∴ الطرفان متساويان

⇦ مثال: بين أن لو $\frac{٨١}{٣٢}$ + لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{١}{٩}$ + لو ٧٦٨ = ٣

الطرف الأيمن: نحوله إلى لوغارتم واحد هكذا:

لو $\frac{٨١}{٣٢} \times \frac{٥^{٢}}{٣^{٢}} \times \frac{١}{٩} \times ٧٦٨$ = لو $\frac{٨١ \times ١٢٥ \times ١ \times ٧٦٨}{٣٢ \times ٢٧ \times ٩}$

= لو ١٢٥ × ٨ = لو ١٠٠٠ = لو $١٠^{٣}$ = ٣ = الطرف الأيسر.

(١٣ ـ ٨) تطبيقات على الأسس واللوغاريتمات Applications

هناك العديد من التطبيقات على قوانين الأسس واللوغاريتمات واقتراناتها، وتتمثل بتبسيط العمليات الحسابية المرتبطة بإيجاد المساحات والقوى والجذور والمسائل العلمية المتعلقة بتكاثر السكان والبكتيريا على سبيل المثال:



⇦ مثال: ما مساحة دائرة نصف قطرها ٨,٩٥ سم؟

مساحة الدائرة = نق^{٢} π (من قوانين المساحات)

∴ مساحة الدائرة = $(٨,٩٥)^{٢}(٣,١٤)$

= (٨,٩٥) (٨,٩٥) (٣,١٤) قوانين الأسس

= (٨٠,١٠٢٥) (٣,١٤) باستخدام الآلة الحاسبة

= ٢٥١,٥١٤ ≈ ٢٥١,٥ سم^{٢}.

⇦ مثال: ما قيمة $(٧٥)^{٥}$؟

باستخدام قوانين الأسس فإن:

$(٧٥)^{٥}$ = ٧٥ × ٧٥ × ٧٥ × ٧٥ × ٧٥ وباستخدام الآلة الحاسبة

= ٥٦٢٥ × ٥٦٢٥ × ٧٥

= ٣١٦٤٠٦٢٥ × ٧٥

= ٢٣٧٣٠٤٦٨٧٥

⇦ مثال: إذا كان عدد البكتيريا الموجودة في خلية ما بعد ن ساعة تعطي بالقانون:

لوع = ن(لو٢ + لو٤) فجد قيمة ع إذا كانت ن = ١ ع ن = ٢

الحل الأول:

لوع = ١(لو٢ + لو٤)

= لو٢ + ٢ لو٢

= ٣لو٢ + لو $٢^{٣}$

∴ لوع = لو ٨

∴ ع = ٨ بكتيريوم

الحل الثاني:

لوع = ٢(لو٢ + لو٤)

= ٢(لو٢ + ٢لو٢)

= ٢ (٣ لو٢)

∴ لوع = لو ٦٤

∴ ع = ٦٤ بكتيريوم

⇦ مثال: ما قيمة (√٢)^٨ ؟

حسب قوانين الأسس فإن

(√٢)^٨ = √٢ × √٢ × √٢ × √٢ × √٢ × √٢ × √٢ × √٢

= (٢) (٢) (٢) (٢) = ١٦

(١٢ ـ ٩) أمثلة محلولة على الأسس واللوغاريتمات

⇦ مثال ١ : ما قيمة كل من:

(١) $(١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$

الحل: $(١٢٥)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥ \times ٥ \times ٥} = ٥$

(٢) $(١٢٥)^{-\frac{١}{٣}}$

الحل: $(١٢٥)^{-\frac{١}{٣}} \; ^{٣} = \frac{١}{(١٢٥)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{١٢٥}} = \frac{١}{٥} = \sqrt[٣]{-١٢٥} = -٥$

$(-١٢٥)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{١}{(-١٢٥)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{-١٢٥}} = -\frac{١}{٥}$

⇦ مثال٢ : أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية

(١) $٣^{٢س} = \frac{١}{٨١}$

الحل: $٣^{٢س} = \frac{١}{٣^{٤}} = ٣^{-٤}$

∴ $٢س = -٢$ $\quad$ $س = -٢$

مجموعة الحل = $\{-٢\}$

(٢) $(٤٩)^{\frac{١}{٢}س} = ٣٤٣$ نجعل الأساس في كل طرف يساوي ٧ هكذا.

$(٧^{٢})^{\frac{١}{٢}س} = (٧)^{٣}$

∴ $٧^{٢ \cdot \frac{١}{٢}س} = ٧^{٣}$

$٧^{س} = ٧^{٣}$ $\quad$ ∴ $س = ٣$

مجموعة الحل = $\{٣\}$

٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) $س^{٤} = \left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{-٢}$ نحول الأساس السالب إلى موجب هكذا

$س^{٤} = \left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{٢}$ نجعل الأس متساوي في الطرفين هكذا

$س^{٤} = \left(\left(\frac{٩}{٤}\right)^{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٩}{٤}\right)^{٤}$ قوانين الأسس

∴ $س = \frac{٩}{٤}$ $\quad$ مجموعة الحل = $\left\{\frac{٩}{٤}\right\}$

⇦ مثال ٣: بين صحة المتطابقة

$$\frac{٥ \times ٣^{٢س-١} - ٤ \times ٣^{٢س-٢}}{٢ \times ٩^{س} - ٣^{٢س-١}} = \frac{١١}{١٥}$$

الطرف الأيمن $= \dfrac{(٥ \times ٣^{٢س} \times ٣^{-١}) - (٤ \times ٣^{٢س} \times ٣^{-٢})}{٢ \times ٣^{٢س} - ٣^{٢س} \times ٣^{-١}}$

$= \dfrac{٣^{٢س}\{(٥ \times \frac{١}{٣}) - (٤ \times \frac{١}{٩})\}}{٣^{٢س}\{٢ - \times \frac{١}{٣}\}}$ إخراج $٣^{٢س}$ عامل مشترك

$= \dfrac{\frac{٥}{٣} - \frac{٤}{٩}}{\frac{٢}{١} - \frac{١}{٣}} = \dfrac{\frac{٤٥ - ١٢}{٢٧}}{\frac{٦ - ١}{٣}}$

$= \dfrac{٣٣}{٢٧} \times \dfrac{٣}{٥} = \dfrac{١١}{١٥}$ الطرف الأيسر

⇦ مثال ٤: إذا كانت $أ = جـ^{س} + جـ^{-س}$

$ب = جـ^{س} - جـ^{-س}$

بين أن $أ^{٢} - ب^{٢} = ٤$

الحل: $أ^{٢} - ب^{٢} = (جـ^{س} + جـ^{-س})^{٢} - (جـ^{س} - جـ^{-س})^{٢}$ تحليل كفرق بين مربعين

$= \{(جـ^{س} + جـ^{-س}) - (جـ^{س} - جـ^{-س})\} \{(جـ^{س} + جـ^{-س}) + (جـ^{س} - جـ^{-س})\}$

$= (جـ^{س} + جـ^{-س} - جـ^{س} + جـ^{-س}) (جـ^{س} + جـ^{-س} + جـ^{س} - جـ^{-س})$

$= (٢جـ^{-س})(٢جـ^{س}) = (٢)(٢)(جـ^{-س})(جـ^{س}) = ٤جـ^{٠}$

$= ٤(١) = ٤$ وهو المطلوب

⇦ مثال ٥: أوجد قيمة لو$_{١٧}$ ٢٣

الحل: نحول لو$_{١٧}$ ٢٣ إلى لوغاريتمات للأساس ١٠ حيث على استخدام الآلات الحاسبة هكذا لو$_{١٧}$ ٢٣ × لو$_{١٠}$ ١٧ = لو$_{١٠}$ ٢٣

ومنها لو$_{١٧}$ ٢٣ = $\frac{\text{لو}_{١٠}\ ٢٣}{\text{لو}_{١٠}\ ١٧}$ = $\frac{\text{لو}٢٣}{\text{لو}\ ١٧}$ «ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة مباشرة»

= $\frac{١٫٣٦١٧}{١٫٢٣٠٤}$ باستخدام الآلة الحاسبة = $\frac{١٣٦١٧}{١٢٣٠٤}$ = ١.٢ تقريباً.

⇦ مثال ٦: أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات:

(١) لو$_{\frac{١}{س^{٢}}}$ ٦٢٥ = - ٢

نحولها إلى الصورة الأسية هكذا

٦٢٥ = $(\frac{١}{س^{٢}})^{-٢}$

٦٢٥ = $(س^{٢})^{٢}$

$٥^{٤} = س^{٤}$

س = ٥

مجموعة الحل = {٥}

٦٢٥	٥
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

(١) لو$_{\sqrt{س}}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٢}$

تحويلها إلى الصورة الأسية

∴ $\sqrt[٤]{٢٧} = (\sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $(٢٧)^{\frac{١}{٤}} = (س^{\frac{١}{٢}})^{\frac{٣}{٢}} = س^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $(٣^{٢})^{\frac{١}{٤}} = (س)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $٣^{\frac{٣}{٤}} = س^{\frac{٣}{٤}}$ ومنها

مجموعة الحل = $\{٣\}$

⇦ مثال ٧: أيهما أكبر بالقيمة $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (-٣٢)^{\frac{١}{٥}}$ أم $(-٣٢)^{\frac{١}{٥}} - (-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ ؟

الطرف الأيمن $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (-٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

$= \sqrt[٣]{-٢٧} - \sqrt[٥]{-٣٢}$

$= \sqrt[٣]{(-٣)^{٣}} - \sqrt[٥]{(-٢)^{٥}}$

$= (-٣) - (-٢) = -٣ + ٢ = -١$

الطرف الأيسر $(-٣٢)^{\frac{١}{٥}} - (-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$

$= \sqrt[٥]{-٣٢} - \sqrt[٣]{-٢٧}$

$= \sqrt[٥]{(-٢)^{٥}} - \sqrt[٣]{(-٣)^{٣}}$

$= (-٢) - (-٣) = -٢ + ٣ = ١$

∴ ($(-٣٢)^{\frac{١}{٥}} - (-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$) أكبر من ($(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (-٣٢)^{\frac{١}{٥}}$)

⇦ مثال٨:

(١) إذا علمت أن مقدار شحنة الإلكترون هي

ـ ١٦ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠.٠ كولوم

عبّر عن مقدار هذه الشحنة بالصورة العلمية أو القياسية:

الحل: نحرك الفاصلة إلى اليمين ليصبح موضعها بين الرقمين ٦، ١ هكذا:

ـ ١٦ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠.٠ = $-١,٦ \times ١٠^{-١٩}$ كولوم شحنة الإلكترون

(٢) إذا علمت أن بُعد كوكب المريخ عن الشمس يساوي ٠٠٠ ٠٠٠ ١٤١ ميل، عبّر

عن هذا البعد بالصورة العلمية.

٠٠٠ ٠٠٠ ١٤١ ميل = ٠٠٠ ٠٠٠ ١,٤١ × ١٠^٨ ميل بعد كوكب المريخ

⇦ مثال٩: إذا علمت أن لو٢ = ٠,٣

لو٣ = ٠,٥

لو٧ = ٠,٨

فاحسب دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة ما يلي:

(١) لو٤٢

الحل: لو٤٢ = لو(٢ × ٣ × ٧) = لو٢ + لو٣ + لو٧ قوانين الأسس

= ٠,٣ + ٠,٥ + ٠,٨ = ١,٦

(٢) لو $\frac{٩}{٤}$

الحل: لو $\frac{٩}{٤}$ = لو٩ ـ لو٤ = لو ٣^{٢} ـ لو ٢^{٢} = ٢ لو٣ ـ ٢ لو٢

= (٠,٥)٢ ـ (٠,٣)٢ = ١٠ ـ ٠,٦ = ٠,٤

(٣) لو$\sqrt{٢١}$

الحل: لو$\sqrt{٢١}$ = لو$\sqrt{٣ × ٧}$ = لو ($\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٧}$)

= لو$\sqrt{٣}$ + لو$\sqrt{٧}$ = لو٣$^{\frac{١}{٢}}$ + لو٧$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ لو٣ + $\frac{١}{٣}$ لو٧

= $\frac{١}{٢}$ {لو٣ + لو٧} = $\frac{١}{٢}$ {٠,٥ + ٠,٨} = ($\frac{١}{٢}$) (١,٣)

= $\frac{١,٣}{٢}$ = ٠,٦٥

⇦ مثال ١٠: ما قيمة أ في كل مما يلي:

(١) لو$_{أ}$ ٥ = $\frac{١}{٢}$ تحويلها إلى الصورة الأسية

$أ^{\frac{١}{٢}} = ٥$

أي أن $٥ = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين

$أ = ٢٥$

$\therefore أ = ٢٥$

(٢) $لو_{أ} \frac{١}{٢٧} = -٣$ بعد تحويلها إلى الصورة الأسية

$أ^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

$أ^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = ٣^{-٣}$

$\therefore أ = ٣$

(٣) $لو_{أ} \sqrt[٣]{٥} = -\frac{١}{٣}$

بعد تحويلها إلى الصورة الأسية

$(أ^{-\frac{١}{٣}})^{٣} = (\sqrt[٣]{٥})^{٣}$ بتكعيب الطرفين

$أ^{-\frac{١}{٣} \times ٣} = ٥$

$أ^{-١} = ٥$ بالضرب التبادلي

$٥أ = ١$

$أ = \frac{١}{٥}$

(٣) $لو_{أ} ٦٤ = \frac{٥}{٢}$

بعد تحويلها إلى الصورة الأسية

$أ^{\frac{٥}{٢}} = ٦٤$

$(\sqrt{أ^{٥}} = ٦٤)^{٢}$ بتربيع الطرفين

$\text{أ}^{٥} = ٦٤ \times ٦٤$

$\therefore \text{أ} = \sqrt[٥]{٦٤ \times ٦٤}$

$= \sqrt[٥]{٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤}$

$= ٤ \sqrt[٥]{٤}$

$\therefore \text{أ} = ٤ \sqrt[٥]{٤}$

⇦ مثال١١ : أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :

(١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢ = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٤$

بجعل الطرف الأيمن لوغاريتماً واحداً

$\text{لو}_{\text{هـ}}\, (\text{س} \times ٢) = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٤$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢٤ \longrightarrow ٢\text{س} = ٢٤$

$\text{س} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$

مجموعة الحل = $\{١٢\}$

(٢) $\text{س} = \text{لو}_{٠,١}\, \frac{٣}{٤} + \text{لو}_{٠,١}\, ١٢ - ٢\, \text{لو}_{٠,١}\, ٠,٣$

نبسط الطرف الأيسر هكذا

$\text{لو}_{٠,١}\, \frac{٣}{٤} + \text{لو}_{٠,١}\, ١٢ - ٢\, \text{لو}_{٠,١}\, ٠,٣ = \text{لو}_{٠,١}\, \frac{٣}{٤} \times ١٢ - \text{لو}_{٠,١}\, (٠,٣)^{٢}$

$= \text{لو}_{٠,١}\, ٩ - \text{لو}_{٠,١}\, ٠,٠٩ = \text{لو}_{٠,١}\, \frac{٩}{٠,٠٩} = \text{لو}_{٠,١}\, \frac{٩٠٠}{٩} = \text{لو}_{٠,١}\, ١٠٠$

أي أن $\text{س} = \text{لو}_{٠,١}\, ١٠٠$ وبتحويلها إلى الصورة الأسية

$١٠٠ = ٠,١^{\text{س}}$

$١٠٠ = (\frac{١}{١})^{\text{س}} = \frac{١}{١٠^{\text{س}}} = ١٠^{-\text{س}}$

∴ $١٠^{٢} = ١٠^{-س}$

∴ - س = ٢

∴ س = -٢

مجموعة الحل = {-٢}

(٣) س = $٢^{لو_{٢} ١٥}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ٢

$لو_{٢}$ س = $لو_{٢}$ $٢^{لو_{٢} ١٥}$ = $لو_{٢}$ ١٥ $لو_{٢}$ ٢ = $لو_{٢}$ ١٥

∴ س = ١٥

مجموعة الحل = {١٥}

⇦ مثال١٢: إذا علمت أن لو٢ = ٠٫٣٠١

لو٣ = ٠٫٤٧٧

أوجد قيمة المتغير س في المعادلة ($٦^{٣-٤س}$) × ($٤^{س+٥}$) = ٨

لأقرب منزلتين عشريتين

يأخذ اللوغاريتم للأساس ١٠ للطرفين

لو$٦^{٣-٤س}$ + لو$٤^{س+٥}$ = لو ٨

∴ لو$٦^{٣-٤س}$ + لو$٤^{س+٥}$ = لو ٨

∴ (٣ - ٤س) لو٦ + (س + ٥) لو$٢^{٢}$ = لو $٢^{٣}$

∴ (٣ - ٤س) لو٢ × ٣ + (س + ٥) لو$٢^{٢}$ = لو $٢^{٣}$

∴ (٣ - ٤س) {لو٢ × لو٣} + ٢(س + ٥) لو٢ = ٣ لو ٢

(٣ - ٤س) لو٢ + ٢(س + ٥) لو٢ = ٣ لو ٢

وبعد فك الأقواس:

٣لو٢ـ ٤س لو٢+ ٣ لو٣ ـ ٤ س لو٣ + ٢س لو٢ + ١٠ لو٢ = ٣ لو ٢

٢س لو٢ـ ٤ س لو٢ـ ٤ س لو٣= ٣ لو ٣ـ ١٠ لو٢

(ـ ٢ س لو٢ـ ٤ س لو٣ = ـ٣ لو ٣ـ ١٠ لو٢)

٢ س لو٢+ ٤ س لو٣ = ٣ لو ٣ + ١٠ لو٢

س (٢ لو٢+ ٤ لو٣) = ٣ لو ٣ + ١٠ لو٢

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{٣ لو ٣ + ١٠ لو٢}}{\text{٢ لو٢ + ٤ لو٣}} = \frac{٣\,(٠,٤٧٧) + ١٠\,(٠,٣٠١)}{٢\,(٠,٣٠١) + ٤\,(٠,٤٧٧)} = \frac{٤٤٤١}{٢٥١٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٤٤٤١}{٢٥١٠} = ١,٧٧$$ لأقرب منزلتين عشريتين

⇦ مثال١٢: ما العدد الصحيح الذي يكافئ الكسر $\frac{(٢ \times ١٠^{-٥})^{٢} \times ٩ \times ١٠^{٤}}{(١٢ \times ١٠^{-٨})^{٢}}$

الحل: نبسط الكسرونتخلص من الأسس هكذا:

$$\frac{(٢ \times ١٠^{-٥})^{٢} \times ٩ \times ١٠^{٤}}{(١٢ \times ١٠^{-٨})^{٢}} = \frac{٢^{٢} \times (١٠^{-٥})^{٢} \times ٩ \times ١٠^{٤}}{(١٢)^{٢} \times (١٠^{-٨})^{٢}} = \frac{٢^{٢} \times ١٠^{-١٥} \times ٣^{٢} \times ١٠^{٤}}{(١٢)^{٢} \times ١٠^{-١٦}}$$

$$= \frac{٨ \times ٩ \times ١٠^{-١١}}{١٤٤ \times ١٠^{-١٦}} = \frac{٨ \times ٩}{١٤٤} \times ١٠^{٥} = \frac{١٠^{٥}}{٢} = \frac{١٠٠٠٠٠}{٢}$$

= ٥٠٠٠٠ العدد الصحيح الناتج من اختصار الكسر.

⇦ مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$(٣^{\text{س}})^{\text{س}} = (٢٧)^{١٢}$ نجعل الأساس في الطرفين يساوي ٣ هكذا

$٣^{\text{س}^{٢}} = (٣^{٣})^{١٢} = ٣^{٣٦}$

ومنها $\text{س}^{٢} = ٣٦$

$\text{س}^{٢} - ٣٦ =$ صفر

(س + ٦) (س ـ ٦) = صفر

س = ـ ٦، ٦

مجموعة الحل = {ـ ٦، ٦}

⇦ مثال١٥: بين صحة المتطابقة $\left(\frac{٩ + \sqrt{٥}}{٢}\right) + ١٩ \left(\frac{٩ + \sqrt{٥}}{٢}\right)^{-١} = ٩$

الطرف الأيمن = $\frac{٩ + \sqrt{٥}}{٢} + \frac{١٩ \times ١}{\frac{٩ + \sqrt{٥}}{٢}}$

$$= \frac{٩ + \sqrt{٥}}{٢} + \frac{١٩ \times ٢}{٩ + \sqrt{٥}}$$

$$= \frac{(٩ + \sqrt{٥})^{٢} + ٧٦}{(٢)(٩ + \sqrt{٥})} = \frac{٨١ + ١٨\sqrt{٥} + ٥ + ٧٦}{١٨ + ٢\sqrt{٥}}$$

$$= \frac{١٦٢ + ١٨\sqrt{٥}}{١٨ + ٢\sqrt{٥}} = \frac{١٨ (٩ + \sqrt{٥})}{٢ (٩ + \sqrt{٥})} = \frac{١٨}{٢} = ٩$$

= الطرف الأيسر.

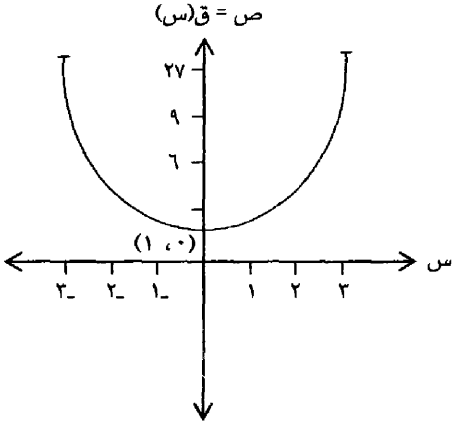
⇦ مثال١٦: مثل الاقتران ق(س) = $\begin{cases} ٣^{-س} ، & -٣ \leq س \leq ٠ \\ ٣^{س} ، & ٠ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

ثم جد مجاله ومداه ومقطعه الصادي

الحل: نكون الجدول التالي

س	٣ـ	٢ـ	١ـ	٠	١	٢	٣
ق(س)	٢٧	٩	٣	١	٣	٩	٢٧

ق(-٣) = $٣^{-(-٣)}$ = $٣^{٣}$ = ٢٧



ق(-٢) = $٣^{-(-٢)}$ = $٣^{٢}$ = ٩

ق(-١) = $٣^{-(-١)}$ = $٣^{١}$ = ٣

ق(٠) = $٣^{-٠}$ أو $٣^{٠}$ = ١

ق(١) = $٣^{١}$ = ٣

ق(٢) = $٣^{٢}$ = ٩

ق(٣) = $٣^{٣}$ = ٢٧

مجاله الفترة [- ٣، ٣]

مداه الفترة [١، ٢٧]

مقطعه الصادي = ١ حيث يمر منحناه بالنقطة (٠ ، ١) كما في الشكل أعلاه

⇦ مثال١٧ : إذا علمت أن لو$_{١٠}$ ١٥ = ٠,١٧ فما قيمة كل من

(١) لو$_{١٥}$ ١٠ (٢) لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٥}$

الحل: لو$_{١٥}$ ١٠ × لو$_{١٠}$ ١٥ = لو$_{١٠}$ ١٠ قوانين اللوغاريتمات

$$\therefore \text{لو}_{١٥}\ ١٠ = \frac{\text{لو}_{١٠}\ ١٠}{\text{لو}_{١٠}\ ١٥} = \frac{١}{\text{لو}_{١٠}\ ١٥}$$

(لاحظ تبديل الأساس ١٥ بالكمية ١٠ والعكس)

$$\therefore \text{لو}_{١٥}\ ١٠ = \frac{١}{\text{لو}_{١٠}\ ١٥} = \frac{١}{٠,١٧} = ٥,٨٨$$

ملحوظة {أو من العلاقة لو$_{هـ}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{س}\ هـ}$ مباشرة}

(٢) لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٥}$ = لو$_{١٠}$ ١ - لو$_{١٠}$ ١٥ = صفر - لو$_{١٠}$ ١٥ = - ٠,١٧

«وهذا ما يسمى بسالب اللوغاريتم»

⇦ مثال١٨ : إحسب قيمة كل من

(١) $(\sqrt{٥}+١)^{٢}$

الحل: $(\sqrt{٥}+١)^{٢} = (\sqrt{٥}+١)(\sqrt{٥}+١)$ وبقانون التوزيع

$= \sqrt{٥}(\sqrt{٥}+١) + ١(\sqrt{٥}+١)$

$= ٥ + ١\sqrt{٥} + ١\sqrt{٥} + ١ = ٦ + ٢\sqrt{٥}$

(٥) $(\sqrt{٥}-١)^{٢}$

الحل: $(\sqrt{٥}-١)^{٢} = (\sqrt{٥}-١)(\sqrt{٥}-١)$ وبقانون التوزيع

$= \sqrt{٥}(\sqrt{٥}-١) - ١(\sqrt{٥}-١)$

$= ٥ - ١\sqrt{٥} - ١\sqrt{٥} + ١$

$= ٦ - ٢\sqrt{٥}$

(٣) $(\sqrt{٥}+١)(\sqrt{٥}-١)$ ولكون أحدهما وافق الآخر فإن الضرب كما يلي

$= (\sqrt{٥})(\sqrt{٥}) - (١)(١) = ٥ - ١ = ٤$

(٤) $\frac{\sqrt{٥}+١}{\sqrt{٥}-١}$ إنطاق المقام أي ضربه بالمرافق $\sqrt{٥} - ١$ هكذا

$$\frac{\sqrt{٥}+١}{\sqrt{٥}-١} \times \frac{\sqrt{٥}+١}{\sqrt{٥}+١}$$

$$\frac{(\sqrt{٥}+١)(\sqrt{٥}+١)}{(\sqrt{٥}+١)(\sqrt{٥}-١)} = \frac{\sqrt{٥}(\sqrt{٥}+١)+١(\sqrt{٥}+١)}{٥-٤}$$

$$= \frac{٥+\sqrt{٥}+\sqrt{٥}+١}{٤}$$

$$= \frac{٦}{٤} + \frac{٢\sqrt{٥}}{٤} = \frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}$$

⇦ مثال١٩: ضع أحد الرموز > ، < ، = في الدائرة الفاصلة بين الكميتين

$\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{-٢}$ ○ $\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}\right)^{-٣}$

الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{٢}}{١}\right)^{٢} (\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

الطرف الأيسر = $\left(\frac{\sqrt[٣]{٣}}{١}\right)^{٣} (\sqrt[٣]{٣})^{٣} = ٣$

∴ الطرف الأيمن أصغر من الطرف الأيسر

∴ $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{-٢}$ < $\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}\right)^{-٢}$

⇦ مثال٢٠: جد مجال كل من الاقترانات

(١) $ق_{١}(س)$ = $لو_{هـ}$ (٣س – ٦)

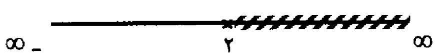
الحل: مجال $لو_{هـ}$ (٣س – ٦) هو ٣س – ٦ > صفر (هكذا الاقتران اللوغاريتمي معرف)

أي أن ٣ (س – ٢) > صفر

∴ س – ٢> صفر

∴ س > صفر

∴ مجال $لو_{هـ}$ (٣س – ٦) على خط الأعداد

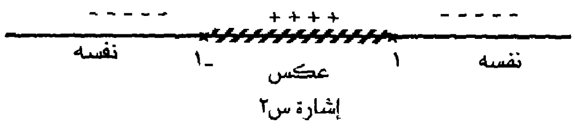


وكفترة (٢، ∞)

(٢) $ق_{٢}(س)$ = $لو_{هـ}$ (١ – $س^{٢}$)

الحل: مجال لو$_{هـ}$ (١ ــ س^{٢}) > صفر (هكذا الاقتران اللوغاريتمي معرف)

∴ (١ + س) (١ ـ س) > صفر



∴ مجال لو$_{هـ}$ (١ ــ س^{٢}) هو كفترة (ـ١، ١)

(٣) مجال هـ^{٢س} هو ح (الإقتران الأسي هكذا معرف)

(١٢ ـ ١٠) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) عبِّر عما يلي بالصورة الأسية

«١» ص = لو$_{٢}$ س

«٢» ص = ٢ لو$_{٣}$ س

«٣» ص = أ لو$_{٢}$ س + ب لو$_{٣}$ س

(٢) حل المعادلة الأُسية التالية

$٣^{٢س+٢} - ٥٥ = ٢٨ (٣^{س} - ٢)$ {٠ ، -٣}

إرشاد: افرض ص = $٣^{س}$

(٣) إذا كان متوسط بعد الأرض عن الشمس هو ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ١٥٠ كيلومتر اكتب البعد بالصورة العلمية.

(٤) بسط المقدار $\frac{٢^{٢} \times ٣^{٢} \times (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}}$ {٢}

(٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية

«١» لو$_{٧}$ ٣٤٣ = س   {٣}

«٢» لو$_{٢}$ $\frac{١}{٣٢}$ = س   {-٥}

(٦) أوجد مجموعة الحل للنظام

$٢^{س} + ٣^{ص} = ٤١$ (١)

$٢^{س} - ٣^{ص} = ٢٣$ (٢)

{(٥ ، ٢)} بالحذف

(٧) أوجد مجموعة الحل للنظام

٢ لوس – ٣ لوص = لو٢ (١)

٢ لوس + ٣ لوص = لو٣ (٢)

$\{ ٣\sqrt[4]{\frac{٢}{٣}} ، \sqrt[4]{\frac{٢}{٣}} \}$

إرشاد تخلّص من اللوغاريتمات

(٨) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين وعلى انفراد:

«١» لو (س^{٢} + ١) = ١ {±٣}

«٢» ٢ لو ١٠٠ = ص {٤}

(٩) إذا علمت أن لو٥ = ٠،٦٩٩ ، لو٢ = ٠،٣٠١

ما قيمة س إذا كان ٢^{س} = ٥ {٢،٣٢}

إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين للأساس ١٠

(١٠) ما قيمة ٣ لو٥ + لو١٩٦ + لو$\frac{١}{٥}$ - ٢ لو٧ {٢}

(١١) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٦س ص فبين أن

٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

إرشاد: ابدأ من (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص

(١٢) ما قيمة $\sqrt[4]{(\frac{٨١}{١٦})^{-٣}}$ $\{ \frac{٨}{٢٧} \}$

(١٣) أيهما أكبر $(\frac{٣}{٨})^{-٢}$ أم $(\frac{-٣}{٨})^{٢}$

{$(\frac{٣}{٨})^{-٢}$ أكبر}

(١٤) ما قيمة كل من في حقل الأعداد الحقيقية

$\sqrt[٥]{-٣٢}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ ، $\sqrt[٤]{١٦}$ ، $\sqrt[٦]{(-٣)^{٦}}$ $\{-٢ ، \frac{٣}{٢} ، ٢ ، ٣\}$

(١٥) حل المعادلة $لو_{هـ} \sqrt{س} + لو_{هـ} \sqrt{س^{٣}} = ١$ $\{\sqrt{هـ}\}$

(١٦) أكتب حاصل الضرب $(٨,٩٥ \times ١٠^{-٢})$ $(٧,٣ \times ١٠^{٥})$ بالصورة العلمية

$\{٦,٥٣ \times ١٠^{٣}\}$

(١٧) ما قيمة $(٨)^{\frac{١}{٣}}$ ، $(٨)^{-\frac{١}{٣}}$ ، $(-٨)^{-\frac{١}{٣}}$ ، $(-٨)^{\frac{١}{٣}}$ ، $(٠,\overline{١٥})^{٢}$

$\{٢ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{-٢} ، -٢ ، \frac{٢٥}{١٠٨٩}\}$

(١٨) خلية بكتيريا يتضاعف عددها بالتكاثر كل ساعة، فإذا كانت س تمثل أعداد البكتيريا بعد ن ساعة حسب العلاقة ن = $لو_{٢}$ س

بعد كم ساعة يُصبح عدد البكتيريا في الخلية ٣٢ بكتيريوم؟ {٥ ساعات}

(٢٢) إذا كانت = $أ^{\frac{٢}{٣}} . ب^{-\frac{١}{٣}}$

فما قيمة ص عندما أ = ٣٦ ب = ٦٤ {٥٤}

(٢٣) إذا كانت س = ١، ص = - ١، ع = ٣٢، ل = - ٣٢

فما قيمة $\left(\frac{س}{ص}\right)^{\frac{١}{٥}} \left(\frac{ص}{ع}\right)^{\frac{٢}{٥}} \left(\frac{ع}{ل}\right)^{\frac{٣}{٥}} \left(\frac{ل}{س}\right)^{\frac{٤}{٥}}$

إرشاد: بسِّط ثم عوِّض {- ٤}

(٢٤) حل المعادلة $(٢٥)^{٣ - \frac{١}{٢} س^{٢}} = \frac{١}{١٢٥}$ {-٣ ، ٣}

(٢٥) بيِّن أن $لو_{١٠} \frac{١١}{٧} + لو_{١٠} \frac{١٤}{٣} - لو_{١٠} \frac{١١}{١٥} = \frac{١}{٢}$

(٢٦) حل المعادلة

$(٣^{س})^{س - ١} = ٩$ {-١ ، ٢}

(٢٧) ما حاصل ضرب

$(س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ع^{\frac{٣}{٢}})\ (س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ص^{\frac{٣}{٢}} - ٣ع^{\frac{٣}{٢}})$

(٢٨) ما قيمة:

«١» $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} \times (٢٧)^{-\frac{١}{٣}}$ {-١}

«٢» $(-٣٢)^{\frac{١}{٥}} \div (٣٢)^{-\frac{١}{٥}}$ {-٤}

(٢٩) حل المعادلة $(١٣)^{٢س-١} = \frac{١}{(٥)^{١-٢س}}$ $\{\frac{١}{٢}\}$

(٣٠) إذا كان $أ = س^{ص} + س^{-ص}$، $ب = س^{ص} - س^{-ص}$

بين أن $أ^٢ - ب^٢ = ٤$

إرشاد: استعمل التحليل أفضل بكثير من التعويض المباشر

(٣١) أكتب قاعدة الاقتران الممثل بالأزواج المرتبة التالية بدلالة س، ص

{(١، ٠)، (١٠، ١)، (١٠٠، ٢)، (١٠٠٠، ٣)، (٠,١، - ١)، (٠,٠١، - ٢)، (٠,٠٠١، - ٣)، ....} بالصورتين الأسية واللوغاريتمية

{$س = ١٠^{ص}$، لوس = ص، س عدد صحيح}

(٣٢) حل المعادلة $لو_{٧}س^٢ \times لو_{٥}٧ = ٢$ {±٥}

(٣٣) إذا كان معدل الزيادة في عدد المواليد لإحدى الدول = ٣٪ سنوياً ومعدل الوفيات فيها = ٠,٠٥ سنوياً، بعد كم سنة يتضاعف عدد سكان هذه الدولة باستخدام القانون:

$ع_{٢} = ع_{١}(١ + ر)^{ن}$ حيث $ع_{٢}$ = عدد السكان الحالي

$ع_{١}$ = عدد السكان الأصلي

ر = الفرق بين نسبة المواليد والوفيات

ن = الزمن بالسنوات

{٣ سنوات}

(٣٤) احسب الفائدة المركبة الناتجة عن إيداع مبلغ ٢٠٠٠ دينار لمدة ٦ سنوات لدى بنك بمعدل فائدة سنوي ٥٪ تضاف في نهاية كل سنة.

(٣٥) ما قيمة:

«١» $(\sqrt[٦]{٢} \times \sqrt[٦]{٥})^{١٢}$ «٢» $(\frac{-١}{٢٤٣})^{\frac{١}{٥}}$ «٣» $(\frac{٣}{٥})^{٠}$

(٣٦) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $(٣)^{١-س}$ وجد مجاله ومداه.

(٣٧) إذا كانت ع = ٥٠٠ - $\frac{١}{٢}$ $هـ^{٠.٠٠٤س}$ تمثل معادلة السعر ـ الطلب حيث س عدد وحدات السلعة المباعة، ع السعر بالدينار للوحدة.

ما السعر إذا كان عدد الوحدات المباعة ١٠٠٠ وحدة.

(٣٨) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار الكهربائي ت (أمبير) والزمن (؟) ثانية هي ت = $(٢)^{؟}$، بعد كم ثانية تصبح شدة التيار ٣٢ أمبير

{٥ ثواني}

(٣٩) حل المعادلة $\frac{(٤)^{س+١}}{(٢)^{س-١}} = ٤$

(٤٠) ما قيمة $لو_{٨}$ ٨١ × $لو_{٧}$ ٨ × $لو_{٣}$ ٧ {٤}

(٤١) عين مجال كل من الاقترانين:

«١» $لو_{هـ}$ (س - ٢) ، «٢» $لو_{هـ}$ (٢ - س)

(٤٢) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية

«١» $لو_{٣}س^{٢}$ = ٢ ، «٢» $لو_{٤}$ (س + ٣) + $لو_{٤}$ (س - ٣) = ٢ ،

«٣» $لو_{٣}$ (س + ٨) ـ $لو_{٣}$ س = ١

(٤٣) إذا علمت أن لو٤ = ٠,٦٠٢١ ، لو٥ = ٠,٦٩٩٠ حل المعادلة $٥^{س} = ٤$

إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين {٠.٨٦}

(٤٤) بيِّن أن $لو_{٢}\, ٣ + لو_{٢}\, ٤ - لو_{٢}\, ٦ = ١$

(٤٥) حل المعادلة $لو_{س}\,(٥س - ٦) = ٢$ {٢ ، ٣}

(٤٦) إذا علمت أن الاقتران $ق(س) = لو_{٤}\, س$ انعكاس للاقتران $هـ(س) = ٤^{س}$

فعين بيانياً محور الانعكاس على المستوى الديكارتي

(٤٧) بسِّط المقدار $\frac{٢^{٥} \times ٣^{٢} \times ٩^{\frac{٢}{٢}}}{٣^{٥} \times ٢^{٤}}$ {٢}

(٤٨) إذا علمت أن لو٢ = ٠,٣٠١٠، لو٣ = ٠,٤٧٧١، لو٧ = ٠,٨٤٥١ فما قيمة لو ٤,٢

{٠,٦٢٣٢}

(٤٩) بيِّن صحة المتطابقة $\frac{(٣)^{٤س - ٢} + (٣)^{٤س + ٢}}{(٣)^{٤س} + (٣)^{٤س - ٤}} = ٩$

(٥٠) أكتب قاعدة العلاقة المتمثلة بالمجموعة

$ع = \{(\frac{١}{٩} ، -٢)، (\frac{١}{٣} ، -١) ، (١ ، ٠) ، (٢٧ ، ٣)\}$ {س = $٣^{ص}$}

(٥١) ضع أحد الرموز > ، < ، = في المربع الفارغ أدناه:

$(١ + ٣ + ٥)^{٢}$ ☐ $١^{٣} + ٣^{٣} + ٥^{٣}$

(٥٢) رتب كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية ترتيباً تصاعدياً

$\sqrt[٢]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt[٤]{١١}$

إرشاد: يحب توحيد الأدلة بعد تحويلها إلى أسس نسبية

(٥٣) حل المعادلة $لو_{ه} \frac{س^{٢}}{٣} + لو_{ه} ٣س = لو_{ه} ١٨ - ٤ \, لو_{ه} ١٢$

(٥٤) بين أن المقدار $\frac{(١٦)^{-\frac{١}{٣}} + (٢٤)^{\frac{١}{٢}}}{(٥٤)^{\frac{١}{٦}}} = ١$

(٥٥) حل المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٦٤ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & لو_{٢} س \\ س^{٢} & ٧ \end{bmatrix}$$

{٨}

(٥٦) حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية وضع الجواب بصورة أسية

٣٢، ٢٤٣، ٣١٧٥

(٥٧) ما قيمة: $(\sqrt{٧})^{٢}$، $(\sqrt{٧})^{-٢}$، $\frac{١}{(\sqrt{٧})^{٢}}$، $\frac{١}{(\sqrt{٧})^{-٢}}$

$(\sqrt[٣]{٥})^{٢}$، $(\sqrt[٣]{٥})^{-٢}$، $(\sqrt[٣]{-٥})^{٢}$، $(\sqrt[٣]{-٥})^{-٢}$

(٥٨) إذا قدرت كتلة الصخور الحاوية على خام النحاس في منجم ما بـ $٤,٥ \times ١٠^{٩}$ طن وكانت نسبة النحاس في الخام المذكور ١,٥٦٪

احسب كتلة النحاس في الخام جميعه واكتب الجواب البصورة العلمية .

(٥٩) اكتب نتيجة حواصل الضرب التالية $٣,٦ \times ١٠^{٥} \times ٢,٤ \times ١٠^{٨}$ بالصورة العلمية.

(٦٠) ما قيمة $(٦٤)^{\frac{١}{٢}}$، $(٨١)^{\frac{١}{٤}}$، $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$، $(١)^{\frac{١}{٦}}$

(٦١) ما قيمة $(\sqrt{١٧})^{\frac{٣}{٤}}$ $(\sqrt{١٧})^{\frac{٥}{٤}}$ $(\sqrt{١٧})^{٢}$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}}$ $(-٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

$(٨)^{\frac{١}{٣}} \div (١٦)^{\frac{١}{٢}}$ ، $(٠,٠٦٤)^{\frac{١}{٢}} \div (٠,٠٠١)^{\frac{١}{٣}}$

(٦٢) أوجد $(٤٥)^{\frac{١}{٢}}$، $(٤٥)^{\frac{١}{٣}}$ لأقرب منزلة عشرية واحدة.

(٦٣) اكتب العددين التاليين بالصورة العلمية

٥٧ ٠٠٠ ٠٠٠ ، ٠٫٠٠٠ ٠٠٠ ٠٥٧

(٦٤) عبّر عما يلي باستخدام الأسس

(أ + ب) (أ + ب) ، (أ - ب) (أ - ب) (أ - ب)

(أ + ب) (أ - ب) (أ + ب) (أ + ب) (أ - ب)

(٦٥) ما قيمة $٣(-٢)^{٤}$ ، $(١٫١)^{٣}$ ، $(١٢)^{٧}(١٢)^{-٧}$

(٦٦) على سطح بياني واحد ارسم بيان الاقترانين $هـ^{س}$، $هـ^{-س}$ وبين أين يتقاطعان.

(٦٧) حل المعادلة $٦^{٢س+١} \times ٢^{-٢س} = ١٨$

(٦٨) ما قيمة $لو_{٥}$ ١٢٥ ، $لو_{٧}$ ٢٤٣ ، $لو_{٣}$ ٢٧ ، $لو_{١١}$ ١١ $\sqrt{١١}$

(٦٩) إذا كان $لو_{٧}س^{٢} \times لو_{٥}٧ = ٢$ ما قيمة س

(٧٠) ما جملة مبلغ ١٠٠٠ دينار مستثمرة بفائدة مركبة معدلها ٧٪ سنوياً إذا كانت الفوائد تضاف كل سنة

اعتبر $(١٫٠٧)^{١٦} = ٣٫٩٥٢١$

(٧١) إذا كان عدد السكان يعطى بالقانون $ع_{ن} = ع_{١}(١ + ر)^{ن}$

حيث $ع_{ن}$ = عدد السكان بعد ن سنة $ع_{١}$ = عدد السكان الآن

ر = الفرق بين نسبة المواليد والوفيات

فإذا بلغت نسبة المواليد عام ٢٠٠٤م في الأردن ٣٫٣٪ ونسبة الوفيات في ذلك العام ٠٫٥٪ بعد كم سنة يتضاعف عدد سكان الأردن البالغ ٥ ملايين الآن؟

(٧٢) حل المعادلات الآتية

$٢^{س^{٢}-٨} = ١$ ، $لو_{٦}(س - ٣) + لو_{٦}(س + ٢) = ١$

$لو_{٥}(٢س + ٤) = ١$ ، $لو_{س}(٥س - ٦) = ١$

(٧٣) $\text{لو}_{٥}\sqrt[٥]{٥}$ ، لو ٠,٠٠٠٠٠١ ، لو ١٠٠٠

(٧٤) جد قيمة $(٣ \times ٢)^{٤}$، $(٣+٢)^{٤}$، $(٨)^{\frac{٢}{٣}}$ $(-٨)^{-\frac{٢}{٣}}$ ، $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢}$، $\left(\frac{٤}{٣}\right)^{-٣}$

(٧٥) مثّل منحنى الاقترانين $ق_{١}(س) = ٣ + هـ^{٢س}$، $ق_{٢}(س) = ٣ + هـ^{-٢س}$ بيانياً، ثم قارن بينهما من حيث المجال والمدى والمقطع الصادي.

(٧٦) ما قيمة $\text{لو}_{هـ}$ هـ، $\text{لو}_{هـ}$ $هـ^{٢}$، $\text{لو}_{هـ}$ ١، $\text{لو}_{هـ}$ $هـ^{\frac{١}{٢}}$ ، $\text{لو}_{هـ}\sqrt{هـ}$

(٧٧) حوّل إلى لوغاريتمات طبيعية «للأساس هـ»

لو٣، $\text{لو}_{٥}$ ٨ ، $\text{لو}_{٢}$ هـ

إرشاد: استخدم القانون $\text{لو}_{ب}$ أ × $\text{لو}_{هـ}$ ب = $\text{لو}_{هـ}$ أ

(٧٨) بيّن أن $\text{لو}_{ب}$ أ = $\frac{١}{\text{لو}_{أ}\ ب}$

إرشاد: استخدم القانون $\text{لو}_{ب}$ أ × $\text{لو}_{أ}$ ب = $\text{لو}_{أ}$ أ

(٧٩) بسط ما يلي بقدر الإمكان:

$\text{لو}_{٥}(\text{لو}_{٦}(\text{لو}_{٣}\ ٧٢٩))$، $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}(\text{لو}_{٥}\ ٦٢٥)$ ، $\text{لو}_{أ}(\text{لو}_{أ}\ أ^{أ})$

إرشاد: نبدأ التبسيط من الداخل

(٨٠) أوجد مجموعة الحل للمعادلات

«١» $\text{لو}_{س}\ ٥ + \text{لو}_{٢٥}\ س = \frac{١٩}{٦}$ $\{\sqrt[٣]{٥} ، ٥^{٦}\}$

إرشاد: $\text{لو}_{٢٥}\ س = \frac{١}{\text{لو}_{س}\ ٢٥}$ ثم التبسيط والتحليل

«٢» $\text{لو}_{٤}\ س - \text{لو}_{٤}(س - ١) = \frac{١}{٢}$ $\{٢\}$

«٣» $س^{\frac{١}{٣}} + ١٢س^{-\frac{١}{٣}} = ٧$ $\{٢٧ ، ٢٥٦\}$

(٨١) بين أن:

«١» $\frac{س + ٢\sqrt{س} + ١}{س + \sqrt{س}} = ١ + \frac{١}{\sqrt{س}}$ {تحليل}

«٢» $\dfrac{3^{\text{ن}} \times 9^{\text{ن}+1} + 5 \times 27^{\text{ن}}}{15 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\text{ن}} \times 81^{\text{ن}} - \frac{1}{9} \times 27^{\text{ن}+1}} = \dfrac{7}{6}$

«٣» $\dfrac{(4)^{\text{س}+1} \times (54)^{\text{س}-2}}{(3)^{2\text{س}-2} \times (24)^{\text{س}-1}} = \dfrac{8}{9}$

(٨٢) إذا كان $\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س} + \text{ص}) = \text{لو}_{\text{ه}}\text{س} + \text{لو}_{\text{ه}}\text{ص}$ فجد ص بدلالة س.

إرشاد: ابدأ بالطرف الأيسر {$\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - 1}$}

(٨٣) إذا كان قانون السعر ـ الطلب لسلعة يُعطى بالعلاقة التالية:

$\text{ع} = \left(1 - \dfrac{4}{4 + \text{هـ}^{-0.002\text{س}}}\right)$ حيث ع السعر ، هـ العدد النابييري = ٢,٧

احسب السعر ع عندما يكون عدد الوحدات المطلوبة س = ٥٠٠ وحدة {٤٢٧ دينار}

(٨٤) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) والزمن (ن) في دائرة كهربائية تُعطى بالقانون $\text{ت} = \text{هـ}^{-2\text{ن}}$ حيث هـ العدد النابييري = ٢,٧ ، ت شدة التيار بالأمبير

ن الزمن بالثواني. ما مقدار الزمن اللازم لسريان تيار شدته ٠,٥ أمبير

إرشاد: استعن بالآلات أو الجداول

(٨٥) حل المعادلتين

$2^{\text{س}} = 8^{\text{ص}+1}$ ، $9^{\text{ص}} = 3^{\text{س}-9}$ {(٢١ ، ٦)}

إرشاد: حول النظام إلى معادلات جبرية

(٨٦) ارسم بيان الاقترانين $\text{ق}_1(\text{س}) = 4^{\text{س}}$ ، $\text{ق}_2(\text{س}) = 4^{-\text{س}}$ على سطح بياني واحد

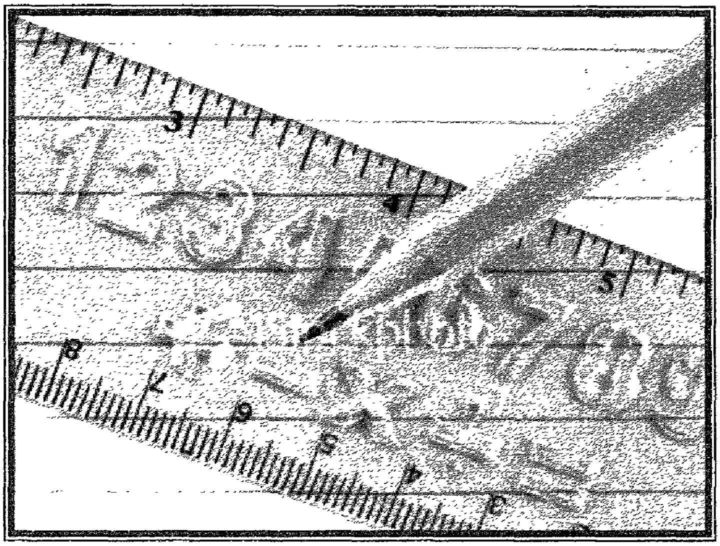
(٨٧) حل المعادلة $7^{\text{س}-1}$ {٨}

(٨٨) ما قيمة كل من لو ٠,٠٠١ ، $\text{لو}_2\sqrt{2}$ ، $\text{لو}_{49} 7$ ، $\text{لو}_5 \frac{1}{25}$

{−٤ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، −٢}

الرياضيات المالية

Financial Mathemetics



إنها الرياضيات التطبيقية كما يسميها الرياضيون، كونها الوسيلة الناجحة لتسيير مجريات أمور الحياة اليومية، أو رياضيات المال والتجارة كما يُسميها رجال الأعمال والاقتصاديون، كونها فرع من فروع الرياضيات القادر على إنجاز المعاملات المالية والتجارية لمساعدتهم على القيام بأنشطتهم الاقتصادية بكل دقة وإتقان.

تعتمد الرياضيات المالية على الرياضيات البحتة وتستخدم أدواتها كالمعادلات والمتتاليات واللوغاريتمات والمتباينات لضبط حساباتها واستخلاص نتائجها.

تبحث الرياضيات المالية في نظريات الفائدة بنوعيها البسيطة والمركبة وعمليات تبادل العملات المختلفة وفي معاملات استثمار الأوراق المالية من اسهم وسندات وكيفية إيجاد الريح والخصم والأوراق التجارية كالكمبيالات، فالمنشآت والبنوك والشركات تحتاج عند تحليل حساباتها إلى الرياضيات للوصول إلى النتائج المتوخاة والمخطط لها مسبقاً من قبل أولئك الأخصائيين.

لقد قسّم الاقتصاديون ورجال الأعمال عناصر الإنتاج إلى أربعة ثم ميزوا بين عائد كل منها كما في هذه السطور.

الأرض ← وعائدها يسمى الريع: والتفسير، الريع هو الإيراد الناتج عن تأجير الأرض للغير.

العمل ← وعائدها يسمى الأجر: والتفسير، الأجر هو الإيراد الناتج عن العمل لدى الآخرين.

رأس المال ← وعائده يسمى الفائدة؛ والتفسير؛ الفائدة هو الإيراد الناتج من إقراض رأس المال للآخرين أو استثماره

التنظيم ← وعائده يسمى الربح؛ والتفسير؛ الربح هو الإيراد الناتج عن التجديدات الفنية في المؤسسات والمحلات التجارية.

وفي عصرنا الحديث «عصر العلم والتكنولوجيا والآلات» ازدادت العلاقات التجارية بين الأفراد والمؤسسات المالية كالبنوك وأصبحت المعاملات التجارية المتعلقة بالكمبيالات والأسهم والسندات والتأمين والعملات جزءاً من أنشطة حياتنا اليومية، كون أهميتها ازدادت ففرضت نفسها على الرياضيات.

لذا فإنني في مؤلفي هذا سأناقش بشيء من الإيجاز المفيد كلاً من:

(١٣ ـ ١) الفائدة Interest

لمّا كان رأس المال عنصر من عناصر الإنتاج، كانت الفائدة عائده التي يحصل عليها المُقرضون أو المستثمرون لرأس المال هذا.

ولقد برر الاقتصاديون دفع الفائدة إلى المستثمرين أو المقرضين لرأس المال باعتبارها ثمناً لامتناعهم من استهلاكه، هذا ويُعتبر عالم الاقتصاد البريطاني كينز Keynes (١٨٨٣ ـ ١٩٤٦) أول من بين أن الفائدة إنما تدفع نتيجة للتخلي عن السيولة النقدية وعدم الاحتفاظ برأس المال على شكل نقدي متداول، هذا ما جاء بنظريته المشهورة «في التوظف والفائدة»

وتحدد قيمة الفائدة بصورة عامة اعتماداً على وجود العناصر التالية:

مقدار رأس المال وسنرمز له بالرمز م ويقاس بالوحدات النقدية كالدينار الأردني.

مقدار مدة الاستثمار أو الإقراض وسنرمز لها بالرمز ن وتقاس بالوحدات الزمنية كالسنوات.

مقدار معدل الفائدة وسنرمز له بالرمز ع ويقاس بالنسبة المئوية.

هذا ويقسم الاقتصاديون ورجال الأعمال الفائدة إلى قسمين هما:

(١) الفائدة البسيطة Simple Interest

وتستخدم قواعد الفائدة البسيطة في العمليات المالية القصيرة الأجل ـ أقل من سنة في معظمها ولا تضاف الفوائد إلى الأصل (رأس المال) إلاّ في نهاية المدة فقط،

وتحسب هكذا:

ف = م × ع × ن ⟵ (١)

حيث: ف = مقدار الفائدة البسيطة ⟵ بالدينار

م = رأس المال أو الأصل ⟵ بالدينار

ع = معدل الفائدة ⟵ بالنسبة المئوية

ن = المدة بالسنوات

والجملة هي مقدار ما للشخص المدخر في المؤسسة المالية من أصل وفائدة بسيطة أي أن:

ج = م + ف ⟵ (٢)

حيث: ج: الجملة

م، المبلغ أو الأصل

ف، الفائدة البسيطة

⇦مثال: «عندما تكون المدة بالسنوات»

أودع شخص مبلغ ٣٥٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها ٩٪ سنوياً احسب فوائده في نهاية العام ثم جملته.

الحل:

م = ٣٥٠٠، ع = ٠,٠٩، ن = ١ سنة

ف = م × ع × ن

= (٣٥٠٠) (٠,٠٩) (١) = ٣١٥ دينار

ج = م + ف = ٣٥٠٠ + ٣١٥ = ٣٨١٥ دينار

⇦مثال: «عندما تكون المدة بالأشهر»

تحول الأشهر إلى سنوات بعد قسمتها على ١٢ شهر هكذا اقترض شخص مبلغ ٤٥٠٠ دينار من أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها ٩٪ سنوياً ولمدة ٨ شهور احسب مقدار الفائدة المستحقة عليه.

الحل:

م = ٤٥٠٠، ع = ٠,٠٩ سنوياً، ؟ = $\frac{\text{٨ شهور}}{\text{١٢ شهر}} = \frac{٨}{١٢}$ سنة

ف = م × ع × ؟ = (٤٥٠٠) (٠,٠٩) ($\frac{٨}{١٢}$) = ٢٧٠ دينار الفوائد المستحقة عليه

«وعندما تكون المدة بالأيام»

هنا يكمن التباين والاختلاف في مقدار الفائدة البسيطة، والتفسير في هذه السطور من المعلوم فلكياً أن السنة = ٣٦٥ يوماً + ٤٨ دقيقة + ٤٦ ثانية ولكن التجار ورجال الأعمال يعتبرون السنة = ٣٦٠ يوماً فقط، وهذا الاعتبار يزيد من الفوائد البسيطة ولصالح المودعين من الأفراد أو التجار والمقرضين من المؤسسات المالية والمصرفية والتجارية للآخرين، لذلك نشأ نوعان من الفائدة البسيطة كما برزت لإيجادها طريقتان هما؛

النوع الأول: وتسمى الفائدة الصحيحة Exact Interest وتُحسب باعتبار السنة ٣٦٥ يوماً، ويرمز لها بالرمز ف ص؛ ومن ثم نطبق القانون:

ف ص = م × ع × $\frac{ي}{٣٦٥}$ حيث ي المدة بالأيام.

⇦مثال: احسب الفائدة الصحيحة لمبلغ ٣٠٠٠ دينار استثمر في بنك لمدة ١٤٠ يوماً بفائدة بسيطة معدلها ٤٪.

ف ص = م × ع × $\frac{ي}{٣٦٥}$ = (٣٠٠٠) ($\frac{٤}{١٠٠}$) ($\frac{١٤٠}{٣٦٥}$) = ٤٦ دينار

النوع الثاني: وتسمى الفائدة التجارية Commercial Interest وتُحسب باعتبار السنة = ٣٦٠ يوماً فقط ويرمز لها بالرمز ف ت؛ ومن ثم نطبق القانون:

$$ف ت = م \times ع \times \frac{ي}{٣٦٠}$$ حيث ت المدة بالأيام.

⇦مثال: اودع شخص مبلغ ٥٠٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها ٩٪ ولمدة ١٦٤ يوماً احسب فوائده التجارية.

$$ف ت = م \times ع \times \frac{ي}{٣٦٠}$$

$$= (٥٠٠٠) (\frac{٩}{١٠٠}) (\frac{١٦٤}{٣٦٠}) = ٢٠٥$$ دنانير

وجملة المبلغ Sum هي مقدار الأصل أو رأس المال مضافاً إليه فوائده البسيطة في نهاية مدة الاستثمار أو هي مقدار القرض مضافاً إليه الفوائد البسيطة المستحقة عليه في نهاية مدة القرض.

وبالرموز: إذا كان م الأصل، ن المدة بالسنوات، ع معدل الفائدة البسيطة بالنسبة المئوية فإن الجملة يرمز لها بالرمز جـ

جـ = م + ف

لكن؛ ف = م ع ن

∴ ف = م ع ن = م (١ + ع ن)

حيث (١ + ع ن) تسمى جملة وحدة النقود في نهاية المدة ن وبمعدل ع٪

⇦مثال: ما جملة مبلغ ١٠٠٠ دينار مستثمرة بفائدة بسيطة لدى أحد البنوك بمعدل ٦٪ ولمدة سنة وأربعة شهور؟

$$ن = \text{المدة} = ١ \text{ سنة وأربعة شهور} = ١٢ + ٤ = ١٦ \text{ شهراً} = \frac{١٦}{١٢} \text{ من السنة}$$

$$جـ = م (١ + ع ن) = ١٠٠٠ (١ + \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٦}{١٢}) = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)$$

= ١٠٠٠ (١,٠٨) = ١٠٨٠ دينار جملة المبلغ

«هذا ويمكن حل المثال باحتساب الفوائد البسيطة ثم ضمها إلى الأصل»

⇦مثال: ما جملة مبلغ ٢٠٠٠ دينار مستثمرة بفائدة بسيطة معدلها ٥٪ سنوياً في نهاية ١٣٥ يوماً باعتبار الفوائد تجارية؟

جـ = م (١ + ع ن) حيث السنة = ٣٦٠ يوماً

$$= ٢٠٠٠ \left(١ + \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{١٣٥}{٣٦٠}\right) = ٢٠٠٠ (١ + ٠.٠٨٧٥)$$

= ٢٠٠٠ (١,٠٨٧٥) = ٢٠٣٧.٥ دينار

(٢) الفائدة المركبة Compound Interest

تختلف الفائدة المركبة عن الفائدة البسيطة من حيث عدم ثبات الأصل (رأس المال) طوال فترات الإيداع أو الاقتراض، إذ يزداد باضطراد في بداية كل فترة زمنية منها كون الفوائد المركبة تضاف إلى الأصل في نهاية كل فترة زمنية من فترات الاستثمار أو الاقتراض ـ سنة أو نصف سنة أو ثلث سنة...

وتعامل معاملته لتصبح من الأصل في بداية الفترة الزمنية التالية، بمعنى أن هذه الفوائد تنتج فوائد أخرى جديدة مما يجعلها متزايدة باستمرار ولذلك سميت الفائدة المركبة وكأنها فوائد لفوائد سابقة وبشكل متراكم، وتحسب المؤسسات المالية والبنوك الفوائد المركبة عادة على القروض الطويلة الأجل أو الإيداعات الطويلة الأمد إلا إذا تم الاتفاق بين الطرفين والمقترض أو المودع والمودع إليه على خلاف ذلك.

لذا فإن الفائدة المركبة عن جميع الفترات لا تكون متساوية بالمقدار كما هو موضح في هذا البيان.

فإذا كان الأصل ١٠٠٠ دينار معدل الفائدة المركبة ٥٪ استثمرت لمدة ٣

سنوات سنوياً والفوائد تضاف إلى الأصل في نهاية كل سنة فإن الفوائد المركبة تحسب هكذا:

الأصل في بداية السنة الأولى = ١٠٠٠ دينار

فائدة السنة الأولى = ١٠٠٠ × $\frac{٥}{١٠٠}$ ×١ = ٥٠ دينار

جملة السنة الأولى ١٠٠٠ + ٥٠ = ١٠٥٠ دينار = الأصل في بداية السنة الثانية

فائدة السنة الثانية = ١٠٥٠ × $\frac{٥}{١٠٠}$ ×١ = ٥٢,٥٠ دينار

جملة السنة الثانية = الأصل في بداية السنة الثالثة = الأصل + الفائدة

= ١٠٥٠ + ٥٢,٥٠ = ١١٠٢,٥٠ دينار

فائدة السنة الثانية = ١١٠٢,٥٠× $\frac{٥}{١٠٠}$ ×١ = ٥٥,١٢٥ دينار

الجملة في نهاية السنة الثالثة= ١١٠٢,٥٠+ ٥٥,١٢٥ = ١١٥٧,٦٢٥دينار

الفوائد المركبة = الجملة - المبلغ الأصل

= ١١٥٧,٦٢٥- ١٠٠٠= ١٥٧,٦٢٥دينار

وبشكل عام وبدلاً من هذا الإسهاب المخل في كيفية حساب الفوائد المركبة لمدة ٣ سنوات فإننا نستخدم القانون التالي لحساب الفوائد المركبة لمبلغ ١٠٠٠ دينار بمعدل فائدة مركبة ٥٪ ولمدة ٣ سنوات هكذا:

جـ = م (١ + ع)^{ن} حيث جـ الجملة، م الأصل أو المبلغ

ع معدل الفائدة المركبة، ن المدة بالسنوات

ولما كانت الفوائد تضاف الأصل كل سنة فإن

جـ = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٥)^{٢} = ١٠٠٠ (١,٠٥)^{٢} = (١٠٠٠) (١,١٠٧٦٢٥)

بالضرب المتكرر أو الآلة الحاسبة

ومنه:

ف مركبة = جـ - م = ١١٥٧,٦٢٥- ١٠٠٠= ١٥٧,٦٢٥ دينار

«الفائدة تضاف إلى الأصل في كل سنة»

⇦مثال: ما جملة مبلغ ٧٠٠٠ دينار بفائدة مركبة معدلها ٣٪ سنوياً ولمدة ٦٠ سنة إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل في نهاية كل سنة ثم احسب الفوائد المركبة.

بما أن جـ = م $(١ + ع)^{ن}$ قانون الفائدة المركبة لحساب الجملة.

= ٧٠٠٠ $(١ + ٠,٠٣)^{٦٠}$

= ٧٠٠٠ $(١,٠٣)^{٦٠}$ وباستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد $(١,٠٣)^{٦٠}$ = ٥,٨٩١٦٢

= ٧٠٠٠ (٥,٨٩١٦٢) = ٤١٢٤١,٣٤ دينار

ومنه:

ف مركبة = جـ - م = ٤١٢٤١,٣٤- ٧٠٠٠= ٣٤٢٤١,٣٤ دينار

الفائدة تضاف إلى الأصل كل فترة زمنية (جزء من السنة).

⇦مثال: ما جملة مبلغ ٦٠٠٠ دينار بفائدة مركبة معدلها ٥٪ سنوياً ولمدة ثلاثة سنوات وست شهور إذا كانت الفوائد تضاف كل نصف سنة وما الفوائد المركبة؟

عندما تضاف الفوائد كل نصف سنة فمعناه تضاف الفائدة إلى الأصل مرتين في السنة أي ان عدد مرات الإضافة = ٢ = ك بشكل عام

فالقانون يصبح جـ = م $\left(١ + \frac{ع}{ك}\right)^{ن \times ك}$

= ٦٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٥}{٢}\right)^{٢٥ \times ك}$

$= 6000\ (1+0.025)^7 = 6000\ (1.025)^7$

وباستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $(1.025)^7$

= ٦٠٠٠ (١,٨٨٦٩) = ٧١٣٢,١٤ دينار

ومنه:

ف مركبة = ٧١٣٢,١٤- ٦٠٠٠= ١١٣٢,١٤ دينار

وهناك حالة ثالثة إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل باستمرار (مع أن هذه الحالة بالذات ستناقش بالتفصيل في موضوع التكامل إلا أننا سنذكرها هنا بشيء من الاختصار المفيد)

سنلجأ إلى العدد هـ الذي ورد ذكره في الأسس واللوغاريتمات على أنه العدد النابييري (نسبة إلى جون نابيير) الرياضي البريطاني.

والقانون

جـ = م × هـ^(ف × ن) حيث هـ = ٢,٧١٨ العدد النابيري

جـ الجملة

كما في المثال م المبلغ

ف معدل الفائدة السنوي

ن المدة السنوية بالسنوي

أودع حمدان مبلغ ٥٠٠٠ دينار في أحد البنوك بمعدل فائدة رسمي سنوي ٧,٥٪ واحتسب البنك الفائدة باستمرار، ما مقدار جملة المبلغ بعد ٤٠ سنة؟

الحل والتفسير:

م = ٥٠٠٠ دينار، ف = ٠,٠٧٥، ن = ٤٠ سنة

المطلوب إيجاد قيمة الجملة جـ.

جـ = ٥٠٠٠ × هـ^(٠,٠٧٥ × ٤٠) = ٥٠٠٠ × هـ^٣ وباستخدام الآلة الحاسبة

ج = ٥٠٠٠ × ٢٠,٠٨٥٥ = ١٠٠٤٢,٧٥ دينار

والفوائد المركبة = الجملة - المبلغ

= ١٠٠٤٢,٧٥ – ٥٠٠٠ = ٥٠٤٢,٧٥ دينار

ملخص مفيد:

لحساب جملة مبلغ أودع في بنك بالفائدة المركبة، هناك ٣ حالات هي:

«١» إذا كانت الفوائد تضاف كل سنة:

$ج = م\,(١ + ف)^{ن}$

«٢» إذا كانت الفوائد تضاف كل جزء من السنة (ك مرة في السنة)

فالقانون يصبح $ج = م\,\left(١ + \frac{ف}{ك}\right)^{ن \times ك}$

«٣» إذا كانت الفوائد تضاف باستمرار

$ج = م \times هـ^{ن ف}$

مقارنة لا بُد منها بين الفائدتين البسيطة والمركبة وتتكون من شقين

الشق الأول: تتطابق (تتساوى) الفائدة البسيطة والمركبة بالقيمة في نهاية السنة الأولى من الاستثمار أو الاقتراض شرط أن تضاف الفوائد إلى الأصل في نهاية السنة الأولى فقط «كما في المثال»

أودع عدنان مبلغ ٦٠٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٧٪ وأودع بسمان مبلغاً في بنك آخر بفائدة مركبة وتبقى معدل الفائدة احسب الفوائد البسيطة والمركبة في نهاية السنة وقارن بينهما؟

$ف\ بسيطة = م\,ع\,ن = (٦٠٠٠)\left(\frac{٧}{١٠٠}\right)(١) = ٤٢٠$ دينار

$ج\ مركبة = (١ + ف)^{ن} = ٦٠٠\,(١.٠٧)^{١} = ٦٤٢٠$ دينار

ف مركبة = ٦٤٢٠ – ٦٠٠٠ = ٤٢٠ دينار

الفائدتان البسيطة والمركبة متساويتان بالمقدار

الشق الثاني: لا تتساوى الفائدة البسيطة والمركبة بالقيمة في نهاية السنة الثانية من الاستثمار أو الاقتراض والمثال نفسه وعندما نريد حساب الفائدة البسيطة والمركبة في السنة الثانية ف ت:

ف بسيطة في نهاية السنة الثانية= م ع ؟= (٦٠٠٠) ($\frac{٧}{١٠٠}$) (١) = ٤٢٠ دينار

بكون الفائدة البسيطة في جميع سنوات الإيداع أو الاقتراض متساوية ولا تؤثر على رأس المال بالزيادة إطلاقاً.

أما الفائدة المركبة في نهاية السنة الثانية فحسابها كما يلي:

جملة السنة الأولى = ٦٤٢٠ دينار كما مر سابقاً بالمثال.

= الأصل في بداية السنة الثانية لينتج الفوائد

فائدة السنة الثانية المركبة = ٦٤٢٠ × $\frac{٧}{١٠٠}$ × ١ = ٤٤٩,٤٠ دينار

وهي فائدة مركبة كون الفائدة في السنة الأولى (٤٢٠) دينار أنتجت فائدة أيضاً

فالفائدة البسيطة في نهاية السنة الثانية ≠ الفائدة المركبة في نهاية السنة الثانية

كون ٤٢٠ ≠ ٤٤٩,٤

بل إن الفائدة المركبة تزيد عن الفائدة البسيطة في نهاية جميع الفترات (السنوات) ما عدا الفترة (السنة) الأولى فقط حيث تتساويان.

والملاحظة التالية تبين أن الأصل عند حساب الفائدة البسيطة لا يزداد نتيجة لعدم إضافة الفوائد البسيطة إليه إلا في نهاية الفترة كاملة.

⇦مثال: ما الفرق بالقيمة بيم الفوائد البسيطة والفوائد المركبة لمبلغ ١٠٠٠٠ دينار أودع في بنك لمدة ١٢ سنة بمعدل ٤,٥٪ والفوائد تضاف سنوياً؟

ف بسيطة = م ع ن كون الأصل م هو فقط الذي يُنتج الفوائدة دون الفوائد في نهاية كل عام.

$$= (١٠٠٠٠) (\frac{٤,٥}{١٠٠}) (١٢) = ٥٢٠٠ \text{ دينار}$$

ف مركبة

جـ = (١ + ع)^{ن} = ١٠٠٠٠ (١,٠٤٥)^{١٢} وباستخدام الآلة الحاسبة

= ١٠٠٠٠ (١,٦٩٥٨٨١) دينار

ف مركبة = جـ - م

= ١٦٩٥٨,٨١ - ١٠٠٠٠= ٦٩٥٨,٨١ دينار

والفرق لصالح الفائدة المركبة =

٦٩٥٨,٨١ - ٥٢٠٠= ١٧٥٨,٨١ دينار

(١٣ - ٢) خصم الكمبيالات Bills Discount

«كتطبيق على الفائدة البسيطة»

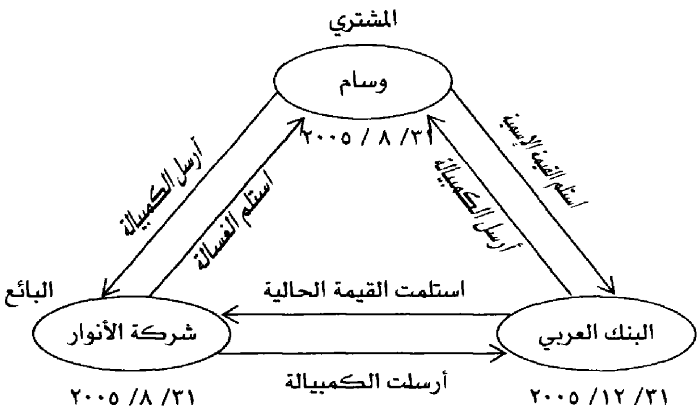
الكمبيالة Bill؛ ورقة من الأوراق التجارية Commercial Papers ظهرت إلى حيز الوجود بعد أن ازدهرت التجارة بشكل رهيب وأصبحت النقود غير قادرة على مواجهة تشعب التجارة واتساعها غير المعتاد، انتشر استعمال الكمبيالة كوسيلة من وسائل المبادلات التجارية لإتمام معظم الصفقات التجارية إذ ساعدت على انتشار الأعمال التجارية في المدن والريف والبادية كونها أصبحت في عصرنا الحالي أداة للوفاء والضمان لما تحويه من بيانات موثقة.

فالكمبيالة صك مكتوب يتضمن تعهداً بدفع مبلغ معين من المال مجرد

الاطلاع أو في موعد معين، ولكن كيف يتم التعامل بالكمبيالة بين البائع والمشتري هذا ما سنوضحه في البيان التالي:

⇦مثال: ذهب وسام الموظف البسيط إلى شركة الأنوار لبيع الأدوات الكهربائية بتاريخ ٣١/ ٨/ ٢٠٠٥م لشراء غسّالة بمبلغ ٢٠٠ دينار، دفع من ثمنها فوراً ١٠٠ دينار وكتب بالباقي (١٠٠ دينار) على نفسه كمبيالة تفيد بموجبها بسداد قيمتها في ٣١/ ١٢/ ٢٠٠٥م ولكن الشركة أرادت تحصيل قيمة الكمبيالة فوراً فأرسلتها إلى أحد فروع البنك العربي مقابل أن يقوم البنك بخصم نسبة مئوية من قيمتها تسمى بنسبة الخصم.

وكأن الخصم هذا فائدة بسيطة عن المدة الواقعة بين تاريخ وضعها ٣١/ ٨/ ٢٠٠٥م وتاريخ استحقاقها ٣١/ ١٢/ ٢٠٠٥م وبعدها تستحق الكمبيالة الدفع مع بقاء وسام مديناً للبنك والشركة كفيلاً له ويسمى المبلغ الذي تقبضه الشركة بعد الخصم القيمة المالية للكمبيالة كما في المخطط المبسط التالي:



ابدأ بهذا المخطط من المشتري وسام واتجه نحو شركة الأنوار ثم نحو البنك ثم عُد في النهاية إلى المشتري (هكذا كانت رحلة الكمبيالة)، لترى أن الكمبيالة التي قيمتها الأسمية ١٠٠ دينار (أصبح بتاريخ ٣١/ ١٢/ ٢٠٠٥) مع وسام

(سيمزقها إن شاء) وأما البنك فدفع القيمة الحالية للشركة بتاريخ ٣١/ ٨/ ٢٠٠٥ واستلم من وسام ١٠٠ دينار القيمة الاسمية.

ولكن لنسأل هذا السؤال:

ماذا استفاد كل من البنك ووسام من عملية خصم الكمبيالة تلك؟

لنبدأ بوسام: استفاد أنه اشترى بتاريخ ٣١/ ٨/ ٢٠٠٥م غسالة دون أن يمتلك النقود.

وأما الشركة فإنها باعت الغسالة بمبلغ ٢٠٠ دينار فوراً ١٠٠ دينار واستلمت من البنك القيمة الحالية الأقل من ١٠٠ دينار الأخرى.

وأما البنك فإنه خصم مبلغ من الكمبيالة يسمى خصم الكمبيالات مقابل انتظاره مدة ٤ شهور من ٣١/ ٨/ ٢٠٠٥م إلى ٣١/ ١٢/ ٢٠٠٥م على وسام حتى سداد المبلغ ١٠٠ دينار.

والآن:

لو صيغ السؤال السابق بهذه الكيفية:

خصم تاجر كمبيالة قيمتها الاسمية ١٠٠ دينار في أحد البنوك بنسبة خصم معدلها ٨٪ وتستحق الدفع بعد ٤ شهور ، ما مقدار الخصم؟

بما أن:

مقدار الخصم = القيمة الاسمية للكمبيالة × نسبة الخصم × مدة الاستحقاق بالسنوات

حيث:

القيمة الاسمية للكمبيالة: هي قيمة الكمبيالة المدونة عليها

نسبة الخصم: المعدل المئوي للفحم أو قيمة الخصم على كمبيالة فيها الاسمية ١٠٠ دينار تستحق الدفع بعد سنة واحدة.

مدة الاستحقاق: المدة الواقعة بين تاريخ كتابة الكمبيالة وتاريخ خصمها دفع منها ولا تتجاوز السنة في معظم الأحيان.

فإن:

فإن الخصم = ١٠٠ × $\frac{٨}{١٠٠}$ × $\frac{٤}{١٢}$ باعتبار الخصم كفائدة بسيطة ولكن لصالح البنك.

= $\frac{٨}{٣}$ = ٢,٦٦ دينار

القيمة الحالية للكمبيالة = القيمة الاسمية – مقدار الخصم.

= ١٠٠ – ٢,٦٦= ٩٧,٣٤ دينار

وكأن البنك خصم ٢,٦٦ دينار له وأعطى للشركة ٩٧,٣٤ دينار واستلم من وسام القيمة الاسمية للكمبيالة ومقدارها ١٠٠ دينار.

⇦مثال: اشترت سلمى تلفازاً بمبلغ ٥٠٠ دينار دفعت من ثمنه نقداً ٢٠٠ دينار وكتبت بالباقي كمبيالتين متساويتين بالقيمة الاسمية الأولى تستحق الدفع بعد ٣ شهور والثانية بعد ٦ شهور من الآن فإذا كان نسبة الخصم ٨٪ فما القيمة الحالية للكمبيالتين معاً وما مقدار الخصم؟

الباقي = ٥٠٠ – ٢٠٠ = ٣٠٠ دينار (القيمة الاسمية للكمبيالتين معاً)

الحل: القيمة الاسمية لكل كمبيالة = ٣٠٠– ٢ = ١٥٠ دينار.

مقدار الخصم عن الأولى= ١٥٠ × $\frac{٨}{١٠٠}$ × $\frac{٣}{١٢}$ = ٣ دنانير

وقيمتها الحالية= ١٥٠– ٣ = ١٤٧ دينار.

مقدار الخصم عن الثانية = ١٥٠ × $\frac{٨}{١٠٠}$ × $\frac{٦}{١٢}$ = ٦ دنانير

وقيمتها الحالية= ١٥٠– ٦ = ١٤٤ دينار.

∴ القيمة الحالية للكمبيالتين معاً = ١٤٧+ ١٤٤ = ٢٩١ دينار.

ومقدار الخصم (للبنك) = ٣+ ٦ = ٩ دنانير.

(١٣ ـ٣) معاملات تجارية مرافقة لعمليات الشراء والبيع:

(١) التغير ونسبته Change and it,s Rate

التغير ظاهرة من ظواهر هذا العصر وسمة من سماته أيضاً، تنتشر في جميع بقاع الأرض، فأسعار السلع والسيارات والأراضي والعقارات تتزايد أو تتناقص باستمرار تبعاً للظروف الاقتصادية السائدة هنا وهناك.

فإذا علمت أن قيمة سلعة في وقت ما قد تغيرت وأصبحت قيمتها الحالية أقل أو أكبر من قيمتها السابقة فإن:

قيمة التغير = القيمة الحالية ـ القيمة السابقة (لهذه السلعة أو الظاهرة) ← (١)

فإذا كانت قيمة التغير موجبة كان هذا مؤشراً على النمو الاقتصادي، وإذا كانت قيمته سالبة كان هذا مؤشراً على الانكماش الاقتصادي، وفي الحالتين:

$$\text{نسبة التغير} = \frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة السابقة}} \times ١٠٠\%$$

⇦مثال: اشترى خالد حافلة نقل عام ١٩٩٠م بمبلغ ١٠٠٠٠ دينار فإذا أصبح ثمنها عام ٢٠٠٥م مبلغ ٢٥٠٠٠ دينار، فما مقدار التغير ونسبته في ثمن الحافلة عام ٢٠٠٥م مقارنة بعام ١٩٩٠م؟

مقدار التغير = القيمة الحالية (عام ٢٠٠٥م) ـ القيمة السابقة (عام ١٩٩٠م)

= ٢٥٠٠٠ ـ ١٠٠٠٠ـ ١٥٠٠٠ دينار

$$\text{نسبة التغير} = \frac{١٥٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ١٠٠\% ـ ١٥٠\%$$

وبما أن قيمة التغير موجبة فإنها تشير إلى تزايد أو ارتفاع في ثمن الحافلة.

⇦مثال: اشترى صاحب مصنع آلة بمبلغ ٢٠٠٠٠ دينار عام ٢٠٠٠م فإذا أصبح ثمنها ١٨٠٠٠ دينار عام ٢٠٠٥م.

جد نسبة التغير في ثمن الآلة عام ٢٠٠٥م مقارنة بعام ٢٠٠٠م؟

مقدار التغير = القيمة الحالية (عام ٢٠٠٥م) - القيمة السابقة (عام ٢٠٠٠م)

= ١٨٠٠٠ - ٢٠٠٠٠ = - ٢٠٠٠ دينار (خسارة)

نسبة التغير = $\frac{-٢٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = - ١٠٪ وبما أن مقدار التغير سالب فهذا يشير إلى تناقص أو انخفاض في ثمن الآلة.

(٢) **هامش الربح** Profit Margin

إن الهدف الأساسي من القيام بعمليات الشراء والبيع هو تحقيق أقصى الأرباح، وهذا الهدف لا يتحقق برفع الأسعار عند عملية البيع في معظم الأحيان وإنما بخفض التكلفة عند الشراء بدراية وإتقان، فتكلفة البضاعة تشمل ثمن شرائها ومصاريف أخرى عليها مثل مصاريف نقلها وشحنها وتفريغها وتأمينها وتخزينها والعمولات الأخرى وغيرها فعندما يشتري تاجر بضاعة ما ويطرحها للبيع في الأسواق فإنه يضيف إلى ثمن تكلفتها (ثمن الشراء والمصاريف) هامشاً ربحياً مقدراً بالدنانير لكي يغطي فيه مصروفاته ويحصل على الربح الذي يأمل أن يحققه.

فهامش الربح بالدينار هو المبلغ الذي يضاف إلى تكلفة البضاعة عند بيعها ولحسابه تستخدم القاعدة التالية:

هامش الربح = الربح (المكسب) + المصروفات

وهذا الهامش يُنسب عادة إلى ثمن التكلفة أو إلى ثمن البيع هكذا:

نسبة هامش الربح إلى التكلفة = $\frac{\text{هامش الربح}}{\text{ثمن التكلفة}}$ × ١٠٠٪

$$\text{نسبة هامش الربح إلى ثمن البيع} = \frac{\text{هامش الربح}}{\text{ثمن البيع}} \times ١٠٠\%$$

ولا تنس أن:

ثمن البيع = ثمن التكلفة + هامش الربح.

⇦مثال: إذا كان ثمن تكلفة آلة تصوير ٥٠٠٠ دينار، ونسبة المصروفات ١٠٪ من ثمن التكلفة ونسبة الربح المطلوب ٢٥٪ من ثمن التكلفة احسب:

(١) ثمن بيع الآلة (٢) نسبة هامش الربح بالنسبة إلى ثمن البيع.

هامش الربح = الربح + المصروفات

$$\text{الربح} = \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٥٠٠٠ = ١٢٥٠ \text{ دينار}$$

$$\text{المصروفات} = \frac{١٠}{١٠٠} \times ٥٠٠٠ = ٥٠٠ \text{ دينار}$$

لكن هامش الربح = الربح + المصروفات

∴ هامش الربح = ١٢٥٠ + ٥٠٠ = ١٧٥٠ دينار

ثمن بيع الآلة = ثمن التكلفة + هامش الربح

= ٥٠٠٠ + ١٧٥٠ = ٦٧٥٠ دينار

$$\text{نسبة هامش الربح} = \frac{\text{هامش الربح}}{\text{ثمن البيع}} \times ١٠٠\% = \frac{١٧٥٠}{٥٠٠٠} \times ١٠٠\%$$

= ٣٥٪

ومن هامش الربح هذا يمكن تسعير البضائع حيث يحسب سعر البضاعة وفق العلاقة التالية:

$$\text{سعر التكلفة} = \frac{\text{التكلفة}}{١ - \text{نسبة هامش الربح إلى ثمن البيع}}$$

⇦مثال: إذا كانت تكلفة إنتاج سلعة (بضاعة) هي ٨٠ دينار وكانت نسبة هامش الربح إلى ثمن البيع المرغوب فيه هو ٢٠٪ فكم دينار سعر السلعة (ثمن البيع).

بما أن نسبة هامش الربح المرغوب فيه = ٢٠٪ = ٠,٢

$$\text{فإن سعر السلعة} = \frac{\text{التكلفة}}{\text{١ ـ نسبة هامش الربح}} = \frac{٨٠}{١ - ٠.٢} = \frac{٨٠٠}{٠.٨} = ١٠٠ \text{ دينار}$$

(٣) التخفيض Discount

ويُسمى في كثير من الأحيان الخصم ويُقدَّر بالنسبة المئوية وهو مقدارالتنزيل في أسعار السلع لترويجها أو التخلص من المخزون المتراكم منها Stock أو لمنافسة المنتجات الأخرى نتيجة لاقتراب مدة صلاحيتها من الانتهاء.

وبحسب القاعدة:

مقدار التخفيض = النسبة المئوية للتخفيض × ثمن البيع

والثمن بعد التخفيض = ثمن البيع - مقدار التخفيض.

⇦مثال: طرحت إحدى الشركات أجهزة حاسوب بلغت تكلفتها ٨٠٠٠ دينار بسعر يشمل نسبة هامش الربح ٤٠٪ من ثمن التكلفة وفي خلال موسم التنزيلات تم تحفيض سعرها بنسبة ٢٥٪ احس:

(١) ثمن البيع قبل التنزيلات (٢) ثمن البيع خلال التنزيلات.

$$\text{هامش الربح} = \frac{٤٠}{١٠٠} \times ٨٠٠٠ = ٣٢٠٠ \text{ دينار}$$

الثمن قبل التنزيلات = ٨٠٠٠ + ٣٢٠٠ = ١١٢٠٠ دينار

ولحساب ثمنها خلال التنزيلات نحسب مقدار التخفيض

$$\text{التخفيض} = \frac{٢٥}{١٠٠} \times ١١٢٠٠ = ٢٨٠٠ \text{ دينار}$$

ثمن البيع خلال التنزيلات = ١١٢٠٠ - ٢٨٠٠ = ٨٤٠٠ دينار.

(٤) العمولة Commission

مبلغ من المال يتقاضاه الأشخاص القائمين على تسهيل عمليات البيع والشراء أو تقديم خدمات كمندوبي المبيعات والدعاية والإعلان والسماسرة بشكل عام، مكافأة لهم على ما يقومون به من تسهيلات وإنجاز للمعاملات وفق نظام خاص يُسمى نظام العمولات وغالباً ما تُحسب العمولة كنسبة مئوية من صافي المبيعات كما في القاعدتين التاليتين:

نتيجة العمولة = النسبة المئوية للعمولة × صافي المبيعات

صافي المبيعات = جملة المبيعات – المبيعات المرتجعة

والمبيعات المرتجعة هي السلع التي تعاد إلى البائع لأسباب كثيرة منها عدم المطابقة أو التلف أو غيرها.

والعمولات أنواع وأشكال منها:

أولاً: العمولة المباشرة وتحسب كنسبة ثابتة محددة مسبقاً من صافي المبيعات عن فترة معينة.

ثانياً: العمولة المتدرجة: وتحسب كنسب مئوية متزايدة حيث ترتبط بصافي المبيعات لعدة مستويات متفق عليها.

ثالثاً: عمولة مُضافة إلى الراتب الأساسي: وتحسب كنسبة مئوية من المبيعات شريطة أن تتعدى هذه المبيعات حداً أدنى متفق عليه.

«كما في المثال»

اتفقت سلمى مندوبة المبيعات لدى مؤسسة لبيع الملابس على أن تكون عمولتها ٢٪ من صافي المبيعات بصورة شهرية.

احسب مقدار عمولتها المستحقة عن كل من الأشهر التالية:

(١) شهر شباط إذا كان صافي المبيعات ١٠٠٠ دينار

(٢) شهر آذار إذا كان صافي المبيعات ٢٠٠٠ دينار

(٣) شهر نيسان إذا كان صافي المبيعات ٥٠٠٠ دينار وبلغت قيمة المبيعات المرتجعة ٥٠٠ دينار

بما أن مقدار العمولة = النسبة المئوية للعمولة × صافي المبيعات

فإن: عمولتها عن شهر شباط = $\frac{٢}{١٠٠}$ × ١٠٠٠ = ٢٠ دينار

عمولتها عن شهر آذار = $\frac{٢}{١٠٠}$ × ٢٠٠٠ = ٤٠ دينار

عمولتها عن شهر نيسان = $\frac{٢}{١٠٠}$ (٥٠٠٠ - ٥٠٠) = $\frac{٢}{١٠٠}$ (٤٥٠٠)

= ٩٠ دينار

⇦مثال: يتقاضى سمسار أراضٍ وعقارات عمولة نسبتها ٢٪ من البائع والمشتري فإذا بيعت شقة بمبلغ ٥٥٠٠٠ دينار فكم دينار يقبض السمسار من البائع والمشتري؟

العمولة من المشتري = $\frac{٢}{١٠٠}$ × ٥٥٠٠٠ = ١١٠٠ دينار

العمولة من البائع = $\frac{٢}{١٠٠}$ × ٥٥٠٠٠ = ١١٠٠ دينار

يتقاضى السمسار = ١١٠٠ + ١١٠٠ = ٢٢٠٠ دينار

(١٣ ـ ٤) الأوراق المالية Financial Papers

تضم الأورق المالية الأسهم والسندات التي يكتتب بها أو يشتريها الفرد أو المشروع للحصول على الأرباح والفوائد معاً ولكل ورقة مالية سواء أكانت سهماً أو سنداً **سعر اسمي** ثابت مكتوب على وجه السهم أو السند وهناك ما يسمى **بسعر الشراء** للسهم أو السند وهي القيمة التي يدفعها الفرد أو المشروع ثمنا لهذه الأوراق مضافاً إليها مصاريف يتحملها عند الشراء كالعمولة والرسوم وغيرها وهناك سعر

يسمى **سعر البيع** وهي القيمة التي تباع فيها السندات والأسهم في السوق الحالي وهذه القيمة عرضة للتغير من وقت لآخر.

لذلك فالأوراق المالية ستُناقش في بنود ثلاثة هي:

البند الأول: الأسهم Shares

والسهم حصة في رأس مال الشركة المساهمة يُجير لصاحبه الحصول على الربح عندما تقوم الشركة بتوزيع الأرباح على المساهمين ، فعندما يؤسس عدد من الأشخاص شركة مساهمة محدودة فإنهم يقسمون رأسمالها إلى عدد من الحصص المتساوية ــ ١٠٠٠ حصة، ١٠٠٠٠ حصة، ٠٠٠ إلخ تسمى كل حصة منها سهماً «Share» ويتم تحديد ثمن كل سهم بما يسمى «القيمة الاسمية للسهم» وتُطرح هذه الأسهم على الجمهور للاكتتاب بها ـ شراء الأسهم عند التأسيس ـ عن طريق البنوك والمؤسسات المالية المتخصصة وبعد مباشرة الشركة لأعمالها وتحقيق الأرباح يكون لكل مساهم بها ـ المكتتب بأي عدد من الأسهم ـ نصيب من الأرباح المتحققة وبنسبة مساهمته حسب القانون التالي:

الأرباح المستحقة لكل مساهم = عدد الأسهم × القيمة الاسمية للسهم الواحد × نسبة الربح.

⇦مثال: اكتتب زيدون في شركة مصفاة البترول الأردنية عند تأسيسها بأسهم عددها ٢٠٠ سهم فإذا كانت القيمة الاسمية للسهم الواحد ٥ دنانير فوزعت الشركة في إحدى السنوات أرباحاً على المساهمين بنسبة ٩٪، فما مقدار أرباحه المستحقة:

$$\text{الأرباح المستحقة لزيدون} = ٢٠٠ \times ٥ \times \frac{٢}{١٠٠} = ٩٠ \text{ دينار.}$$

ومن مزايا الأسهم، إنها قابلة للتداول ــ البيع والشراء ــ في سوق عمان المالي

شريطة أن يكون السهم مدرجاً للتداول في السوق ويعتمد سعر السهم في السوق المالي على مكان الشركة المالية وكمية الأرباح السنوية المتحققة، هكذا:

عندما تحقق شركة أو مؤسسة مساهمة أرباحاً عالية فإن المستثمرين يُقبلون على شراء أسهمها المطروحة في السوق المالي فيزداد الطلب عليها وبناء على قانون العرض والطلب في التجارة فإن سعر تلك الأسهم يرتفع في السوق المالي والعكس صواب فإذا انخفضت أرباح شركة أخرى فإن المستثمرين يحاولون بيع أسهمهم الخاصة بهذه الشركة أو المؤسسة تفادياً لمزيد من الخسارة فتنخفض قيمة السهم في السوق المالي وتتم عمليات البيع والشراء وتحديد سعر السهم قياسي بسوق الأوراق المالية أو البورصة.

والسعر الذي يباع به السهم ويشترى في السوق المالي يسمى سعر السوق وهو مساوٍ لأكبر أو أقل من القيمة الاسمية للسهم حسب مكانة الشركة كما أسلفنا.

⇦مثال: اشترى ليث ٢٠٠ سهم في إحدى الشركات والقيمة الاسمية للسهم الواحد ١٠ دنانير، فإذا وزعت الشركة في إحدى السنوات أرباحاً بنسبة ١٧٪ فكم تكون أرباح ليث السنوية من أسهمه وإذا كان سعر السهم في السوق الحالي ١٦ دينار فما نسبة أرباحه الفصلية؟

أرباح ليث السنوية = عدد الأسهم × القيمة الاسمية للسهم × نسبة الارباح الموزعة.

$$= ٢٠٠ \times ١٠ \times \frac{١٧}{١٠٠} = ٣٤٠ \text{ دينار}$$

لإيجاد نسبة ربحه الفعلي، لا بُد من التوضيح التالي:

لقد تسلم من الشركة أرباحاً مقدارها ٣٤٠ دينار ولكنه اشترى السهم من السوق المالي ولم يكتتب بها عند التأسيس أي أنه استرى السهم الواحد بمبلغ ١٦ دينار بدلاً من الاكتتاب به بقيمة اسمية مقدارها ١٠ دنانير.

$$\text{نسبة ربحه الفعلي} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة الربح}}{\text{سعر السهم في السوق}} \times ١٠٠\%$$

$$\text{نسبة الربح إلى سعر السوق} = \frac{١٠ \times ٠,١٧}{١٦٠٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{١٧٠}{١٦}\% = ١٠,٦\%$$

البند الثاني: السندات Bonds

عندما تحتاج الحكومات والمؤسسات والشركات إلى أموال فإنها تقترض من الجمهور عن طريق إصدار ما يسمى «السندات» وبالقيمة التي تناسبها.

فالسند «Bond» ورقة مالية تصدرها الحكومات والمؤسسات والشركات للحصول على تمويل إضافي لفترة معينة محدودة تسمى فترة استهلاك السند، ويحمل السند عند إصداره قيمة اسمية وتعهداً بدفع أرباح بصفة دورية بمعدل مئوي مدون كتابة على السند نفسه. وتعهد آخر بدفع مبلغاً محدداً ثمناً للسند بعد انقضاء فترة استهلاكه القانونية لسد القيمة المستحقة. وفي نهاية المدة يتم استرداد قيمة السند كاملة، وكأن السند؛ صك مكتوب قابل للتداول ـ البيع والشراء ـ يثبت آن حلوله دائن للجهة التي أصدرته ويحق لحامله بناءً على ذلك بالحصول على فائدة ثابتة دورية من الجهة التي أصدرته (مدينة).

ويتم حساب الربح السنوي الإجمالي على فترة استهلاك السند وفقاً للقوانين:

الربح السنوي للسندات = القيمة الاسمية للسند × نسبة الربح × عدد السنوات

الربح الإجمالي على مدة فترة استهلاك السند= الربح السنوي × مدة الاستهلاك

⇦مثال: ما الربح الإجمالي الذي يحصل عليه شخص يمتلك ١٥٠ سنداً، القيمة الاسمية لكل منها ٣٠ دينار وبربح نسبته ٥٪ علماً بأن فترة استهلاك السند ٧ سنوات.

الربح السنوي للسنوات جميعاً = ٣٠ × ١٥٠ × $\frac{١٧٠}{١٦}$ = ٢٢٥ دينار

الربح الإجمالي على مدة فترة استهلاك السند= ٢٢٥ × ٧ = ١٥٧٥ دينار

البند الثالث: المحفظة الاستثمارية Investment Protfolio

مصطلح اقتصادي يُطلق على جميع ما يملكه الفرد من الأسهم والسندات، والهدف من امتلاك مثل هذه المحفظة هو تنمية القيمة السوقية لهذه الأصول (السهم والسندات) وتحقيق التوظيف الأمثل لما تمثله هذه الأصول من أموال.

وأصول المشروع Assets أو موجوداته هي الموارد التي يمتلكها ويشمل الأصول المتداولة كالنقود والأصول التي يمكن تحويلها إلى نقود مثل الأوراق المالية (الأسهم والسندات).

والأصول الثابتة وهي الموجودات التي يقوم المشروع بشرائها لمساعدته في تسيير أعماله التجارية واستخدامها لا من أجل إعادة بيعها وتحقيق الأرباح وإنما من أجل الوصول إلى أهدافه ألا وهي تحقيق مثل هذه الأرباح ومنها الأصول الثابتة الملموسة كالأراضي والأثاث والآلات والسيارات والأصول الثابتة غير الملموسة كبراءة الاختراع وشهرة المحل وحقوق النشر.

هذا وتقدر قيمة هذه الأصول محاسبياً بأخذ المتوسط الحسابي لقيمتها في بداية الفترة وفي نهايتها مقسوماً على العدد «٢» هكذا.

متوسط مجموع قيمة الأصول = $\frac{\text{قيمة الأصول في بداية الفترة + قيمة الأصول في نهاية الفترة}}{٢}$

والفترة المحاسبية غالباً ما تكون سنة ميلادية واحدة.

وأما نسبة العائد على الاستثمار Rate of Return

فهو نسبة صافي الربح (هامش الربح – المصروفات) إلى مجموع الاستثمارات في المشروع وبما أن الاستثمار يرتبط دائماً برأس المال المستثمر ومتوسط قيمة الأصول، لذا يمكن إيجاد نسبة العائد على الاستثمار بإحدى القاعدتين التاليتين.

الأولى: نسبة العائد على رأس المال المستثمر = $\frac{\text{صافي الربح}}{\text{متوسط قيمه الأصول}} \times 100\%$

(نسبة العائد على الاستثمار)

الثاني: نسبة العائد على رأس المال المستثمر = $\frac{\text{صافي الربح}}{\text{رأس المال المستثمر}} \times 100\%$

(نسبة العائد على الاستثمار)

والجدير بالذكر أن الاستثمار في الأوراق المالية عمل دقيق يحتاج إلى التفكير العميق قبل اتخاذ القرار الصحيح عند البيع أو الشراء على السواء، فإذا ذهبت إلى سوق الأوراق المالية وأردت شراء أسهماً أو سندات فإنك تقف حائراً أمام الكم الهائل منها ولعدة شركات، فأيها تختار قبل اتخاذك لقرار الشراء؟

إن قرارك الأخير للمفاضلة بين أسهم وسندات هذه الشركة مع غيرها من الشركات في السوق المالي لابد أن يحكمه متغيران أساسيان هما:

«العائد والمخاطرة»

أما العائد فيرتبط برأس المال المستثمر كما أسلفنا

وأما المخاطرة فترتبط بسمعة الشركة في السوق.

والقرارا الصائب عند الشراء هو القرار الذي يمزج هذا بذاك لتحقيق الأرباح والابتعاد عن الخسائر المتوقعة قدر الإمكان.

⇦مثال: إذا كان صافي ربح إحدى الشركات ٤٥٠٠٠ وكان متوسط مجموع قيمة أصولها ٤٤٠٠٠٠ دينار احسب النسبة المئوية العائدة على رأسمالها المستثمر.

نسبة العائد = $\frac{\text{صافي الربح}}{\text{متوسط قيمه الأصول}}$ × ١٠٠٪ = $\frac{٤٥٠٠٠}{٤٤٠٠٠٠}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٢٢٥}{٢٢}$ ٪ = ١٠,٢٪

ويمكن أن يقال بأن المشروع الذي يحقق عائداً على الاستثمار أعلى من غيره من بين عدة مشاريع دون تحمل أدنى قدر من المخاطرة يجذب استثمارات أكبر ويكون هو الأفضل لدى المستثمرين المتنافسين كما في المثال التالي:

⇦مثال: يبين الجدول المرفق بيانات عن ثلاثة مشاريع مستقلة باستخدام نسبة العائد على الاستثمار، بين أي المشاريع هي الأفضل للاستثمار؟

المشروع	صافي الربح	متوسط قيمة الأصول
الأول	٥٠ ٠٠٠	٨٠ ٠٠٠
الثاني	٣٥ ٠٠٠	٧٠ ٠٠٠
الثالث	٤٠ ٠٠٠	٧٥ ٠٠٠

الحل: نجد نسبة العائد على الاستثمار لكل مشروع هكذا

للأول = $\frac{٥٠ ٠٠٠}{٨٠ ٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = ٦٢,٥٪

للثاني = $\frac{٣٥ ٠٠٠}{٧٠ ٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

للثالث = $\frac{٤٠ ٠٠٠}{٧٥ ٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = ٥٣٪

المشروع الأول هو الأفضل كون نسبة العائد على الاستثمار لهذا المشروع أعلى من غيره (الثاني والثالث).

مثال: يبين الجدول المرفق عملية استثمار عمّار لمبلغ ١٠٠٠٠ دينار وذلك بشراء أسهم من شركات ثلاث هكذا:

	الشركة أ	الشركة ب	الشركة جـ
عدد الأسهم	١٠٠٠	٣٠٠	١٠٠
القيمة الاسمية للسهم الواحد	٥	١٠	٢٠
نسبة الربح السنوي الدوري	١٠٪	١٥٪	٢٠٪

احسب:

(١) مجموع أرباحه (٢) نسبة عائد رأسماله المستثمر

بما أن الأرباح = نسبة الربح السنوي × قيمة اسمية للأسهم فإن:

$$\text{الأرباح} = \frac{١٠}{١٠٠}(٥ \times ١٠٠٠) + \frac{١٥}{١٠٠}(١٠ \times ٣٠٠) + \frac{٢٠}{١٠٠}(٢٠ \times ١٠٠)$$

$$= ٥٠٠ + ٤٥٠ + ٤٠٠$$

= ١٣٥٠ دينار

وبما ان رأس المال المستثمر = ١٠٠٠٠ دينار

$$\text{نسبة العائد على رأس ماله المستثمر} = \frac{\text{مجموع الأرباح}}{\text{رأس مال المستثمر}} \times ١٠٠٪$$

$$= \frac{١٣٥٠}{١٠٠٠٠} \times ١٠٠٪ = ١٣,٥٪$$

(١٣ ـ ٥) التأمين Insurance

قال أحدهم «لولا وجود الخطر ما وجد التأمين»

والقول على إطلاقه صواب، حيث أن الخطر Risk هو كل ما يصيب الإنسان في شخصه أو ممتلكاته والتأمين ما وجد إلا للتصدي لدرء هذا الخطر بما

يُقلل من خسائره أو تلاشيه أن استطاع.

وبعد أن انتشرت شركات التأمين في معظم بقاع الدنيا وتعددت أنواع التأمين وتشعبت كثيراً، فإننا سنقصر البحث في نوعين فقط هما:

الأول: التأمين على الحياة

والتأمين على الحياة لا يمنع حدوث واقعة الوفاة لأننا جميعنا من تراب وإلى التراب سنعود هكذا شاء الرب المعبود والتأمين على الحياة ليس إلزامياً بل هو اختياري ولمن يُريد، فبعض الأشخاص يقومون بالتأمين على حياتهم مقابل أن يدفع الشخص منهم إلى شركة التأمين مبلغاً من المال شهرياً أو سنوياً يسمى قسط التأمين Insurance Installment بموجب إتفاق بينه وبين شركة التأمين يسمى عقد التأمين Insurance Policy ولفترة محدودة لقاء أن تقوم شركة التأمين بدفع مبلغاً معيناً لورثته والذي يسمى مبلغ التأمين إذا توفي الشخص قبل انتهاء فترة التأمين أو تدفع له مبلغاً من المال مضافاً إليه الفوائد إذا بقى الشخص حياً يرزق بعد انتهاء فترة التأمين.

الثاني: التأمين على الممتلكات

أما التأمين على البضائع المستوردة (الممتلكات) فهو إلزامي من السلطات المختصة، فعندما تستورد شركة تجارية أو صناعية بضاعة من الخارج يجب ان يقوم بالتأمين عليها لدى إحدى شركات التأمين قبل شحنها بحيث يتم الاتفاق بين شركة التأمين والشركة المستوردة بموجبه تدفع شركة التأمين لصاحب البضاعة مبلغاً معيناً في حالة تعرضها للتلف يتناسب هذا المبلغ مع القيمة المؤمن عليها ويدفع صاحب البضاعة لقاء ذلك نسبة مئوية من المبلغ عليه برسم التأمين.

وقد تدفع شركات التأمين عامة ـ على الحياة أو البضاعة ـ أكثر مما تقبض، عندها تتعرض للخسائر الظاهرة إذ تعوض هذه الخسائر باستثمار أموالها في

مشاريع ربحية أخرى لذا فشركات التأمين لا تخسر دائماً حتى ولو تعرضت للخسارة الظاهرية.

⇦مثال: استوردت شركة تجارية أدوات كهربائية منوعة وأمنت عليها لدى إحدى شركات التأمين بمبلغ ٥٠٠٠٠ دينار ودفعت رسم تأمين مقداره ٢٪ فإذا تلف من البضاعة ما مقداره ٨٠٠ دينار، فما ربح شركة التأمين أو خسارتها.

ما قبضته شركة التأمين هو رسم التأمين = ٥٠٠٠٠ × $\frac{٢}{١٠٠}$ = ١٠٠٠ دينار

ما دفعته شركة التأمين هو التعويض ومقداره = ٨٠٠ دينار

ربح شركة التأمين = ١٠٠٠ - ٨٠٠ = ٢٠٠ دينار

⇦مثال: أمّن شخص على حياته بمبلغ ٨٠٠٠ دينار ولمدة ١٦ عام، بعد أن اتفق مع شركة التأمين أن تدفع له عند نهاية مدة العقد المبالغ التي دفعها بالإضافة إلى ١٢٪ من الأرباح المتحققة لتشغيل ما دفعه، فإذا توفي الرجل بعد أن دفع القسط السنوي الخامس كم تكون خسارة شركة التأمين.

القسط السنوي = $\frac{\text{مبلغ التأمين}}{\text{عدد السنوات}}$ = $\frac{٨٠٠٠}{١٦}$ = ٥٠٠ دينار

ما دفعه الرجل لشركة التأمين = ٥٠٠× ٥ = ٢٥٠٠ دينار

ما دفعته شركة التأمين لورثته = مبلغ التأمين = ٨٠٠٠ دينار

خسارة شركة التأمين الظاهرية = ٨٠٠٠ ـ ٢٥٠٠ = ٥٥٠٠ دينار

⇦مثال: أمّن شخص على حياته بمبلغ ٦٠٠٠ دينار لمدة ١٥ عام ووقع عقداً مع شركة التأمين لدفع المبلغ على أقساط واتفق معها أن تدفع له الشركة جميع الأقساط التي دفعها بالإضافة إلى ١٠٪ من الأرباح المتحققة من تشغيل المبلغ، فإذا بلغت الأرباح ٥٠٠٠ دينار وبقي الشخص على قيد الحياة وقد سدد جميع الأقساط ما ربح أو خسارة الشركة.

القسط السنوي = $\frac{٦٠٠٠}{١٥}$ = ٤٠٠ دينار

ما دفعه الشخص للشركة = ٦٠٠٠ دينار (جميع الأقساط)

ما دفعته الشركة للشخص = جميع الأقساط + الربح المتحقق

= ٦٠٠٠ + $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠٠ = ٦٠٠٠ + ٥٠٠ = ٦٥٠٠ دينار

خسارة شركة التأمين الظاهرية = ٦٥٠٠ ــ ٦٠٠٠ = ٥٠٠ دينار

⇦مثال: أمن سائق على سيارته بمبلغ ٢٠٠ دينار واتفق مع شركة التأمين على أن تدفع الشركة ما نسبته ٥٠٪ من قيمة الأضرار التي تلحق بسيارته، فإذا تعرضت سيارته للأضرار نتيجة اصطدامها بسبب التجاوز الخاطئ للسائق وقدرت الأضرار بقيمة ٣٠٠ دينار فهل ربحت شركة التأمين أم خسرت؟

الحل:

ما دفعه الشخص لشركة التأمين = ٢٠٠ دينار

ما دفعته شركة التاأمين للسائق = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ١٥٠ دينار

ربح شركة التأمين = ٢٠٠ ــ ١٥٠ = ٥٠ دينار

(١٣ - ٦) تبديل العملات أو تحويلها Money (Currency) Exchange

والعملات هي نقود الدول الأخرى، فبالنسبة للأردن مثلاً فإن جميع النقود المتداولة فيه غير النقود الأردنية تسمى العملات.

والمقصود بتبديلها أو تحويلها هو عمليات شرائها وبيعها كأي سلعة أخرى، فالأردن مثلاً يقبض جزءاً من قيمة صادراته من السلع والخدمات بعملة غير الدينار الأردني ويدفع جزءاً من قيمة وارداته بعملات غير الدينار الأردني أيضاً، لذا عليه تكوين أسواق مالية لتبادل العملات ــ فكاف سوق عمان الحالي لبيع وشراء

العمـلات والأوراق الماليـة مـن أسـهم وسـندات ـ يجـب أن تحـذو حـذو الـدول الأخـرى وهـكذا.

وبمـا أن النقـود أداة للتعامـل ومقيـاس لقـيم التـسلع والخـدمات لـذا فإنهـا تستخدم في عمليات التبادل للحصول على السلع والخدمات ونظراً للتطور الكبير في مجالات الاستيراد والتصدير وسهولة التنقل والسفر بين بلدان العالم المختلفة فقد أصبح مـن الـضروري التعـرف علـى كيفيـة تبـادل هـذه العمـلات عـن طريـق البنـوك والصيارفة والبورصات، وعملية تبديل أو تبـادل العمـلات هـذه تعتمـد بـشكل رئيسي على جدول أسعار العملات الذي يصدره البنك المركزي في الدولـة والبنـوك التجاريـة الأخرى المرتبطة به وةالصيارفة بموجـب التعليمـات الـتي يـصدرها بنـك الدولـة (البنـك المركـزي).

لذلك فإنك تشاهد هذا الجدول في كل بنـك ترتـاده وعنـد كـل صـراف تـود التعامل معه، ويجب أن تلاحظ أن سعر بيع العملة عند الصراف هو نفسه سعر شـراء الدينار الأردني من قبل المشتري، وسعر شراء العملة عند الصراف هو نفسه سعر بيـع الدينار الأردني من قبل البائع، كون الجدول يخص الصراف وليس المتعامل معه على الإطلاق.

يُبين الجـدول المرفـق النـشرة اليوميـة لأسـعار تبـادل أو تبـديل بعـض العمـلات (بيعاً وشراءً) مقابل الـدينار الأردنـي كمـا أعلنهـا البنـك المركـزي الأردنـي في إحـدى الصحف المحلية بتاريخ ١٨/ ٢/ ٢٠٠٥م، مع ملاحظة أن هذه الأسـعار متغيرة مـن يوم لآخـر ومـن خطـوة لأخـرى لـذا وجـب التنويـه أولاً واسـتخدام الكمبيـوتر للوصـول إلى السعر الصواب في كل لحظة تريد:

العملة	سعر الشراء	سعر البيع
دولار أمريكي	٠.٧٠٨	٠.٧١٠
يورو	٠.٩٣٥	٠.٩٤١
ريال سعودي	٠.١٨٨	٠.١٨٩

مع ملاحظة أننا نستخدم التناسب في حل مسائل تبديل العملات كما في المثال:

⇦مثال: أرسل معلم يعمل في السعودية ١٠٠٠٠ ريال سعودي إلى ذويه في الأردن فإذا ذهب ابنه إلى أحد البنوك الأردنية لتبديل هذه الريالات (بيعها) بالدينار الأردني، كم دينار أردنياً يقبض بديلاً لها؟

الحل: ابن المعلم يريد أن يبيع ١٠٠٠٠ ريال سعودي فالبنك يحولها إلى سعر الشراء هكذا:

نجري التناسب التالي:

ريال سعودي		دينار أردني	
١	⟵	٠,١٨٨	
١٠٠٠٠	⟵	س	والتناسب طردي

فبالضرب التبادلي: ١ × س = ١٠٠٠٠ × ٠,١٨٨

س = ١٨٨٠,٠٠٠ = ١٨٨٠ دينار أردني.

⇦مثال: تقدم عيسى أحد البنوك طالباً منه أن يُحول لولده الذي يدرس في أمريكا ٥٠٠٠ دينار ١٠ أردني إلى دولارات أمريكية (يريد شراء دولارات).

كم دولار أمريكي استلم؟

الحل: عيسى يريد أن يشتري دولارات أمريكية في البنك يحولها بسعر البيع؛

نجري التناسب التالي:

دولار أمريكي		دينار أردني	
١	⟵	٠,٧١٠	
س	⟵	٥٠٠٠	والتناسب طردي

فبالضرب التبادلي: ٠,٧١٠ × س = ٥٠٠٠ × ١

$$\therefore \text{س} = \frac{٥٠٠٠}{٠,٧١٠} = \frac{٥٠٠٠٠٠٠}{٧١} = ٧٠٤٢,٢٥$$ دولار أمريكي.

(١٣ ـ ٧) نسبة الاستهلاك Ratio of Consumption

الاستهلاك معناه تناقص قيمة أصول (موجودات) المنشأة كالسيارات والآلات بسبب التقادم أو الاستعمال أو كليهما، وعند شراء أصل من أصول المنشأة مثل آلة أو سيارة فإن سعرها ينقص كل عام عن العام السابق له بنسبة معينة نتيجة استهلاكها، هذه النسبة تسمى نسبة الاستهلاك، ونسبة الاستهلاك هذه تقدر بالنسبة المئوية من قيمة الأصل في بداية الفترة المحاسبية (على الأغلب سنة ميلادية) وتحسب في نهاية الفترة الحاسبية المذكورة وتكرر لعدد من الأعوام أو السنوات.

ويستفاد من حساب قيمة الاستهلاك سنوياً في عمل جدول للاستهلاك أو لوحة البيانات المالية لعملية شراء الأصل لمعرفة قيمة هذا الأصل بعد أي فترة زمنية معلومة كما في المثال والجدول التاليين:

⇦مثال: إذا كان سعر سيارة ١٠٠٠٠ دينار وكان سعرها ينقص كل عام بنسبة ٥٪ من سعرها في العام السابق له. كم ديناراً يصبح سعرها بعد مرور ثلاثة أعوام؟ ثم رتب المعلومات في جدول يمثل لوحة البيانات المالية لعملية شراء السيارة.

الحل:

النقص أو الاستهلاك في السنة الأولى = $١٠٠٠٠ \times \frac{٥}{١٠٠} = ٥٠٠$ دينار

سعر السيارة في نهاية السنة الأولى = ١٠٠٠٠ ـ ٥٠٠ = ٩٥٠٠ دينار

النقص أو الاستهلاك في السنة الثانية = $٩٥٠٠ \times \frac{٥}{١٠٠} = ٤٧٥$ دينار

سعر السيارة في نهاية السنة الثانية = ٩٥٠٠ – ٤٧٥ = ٩٠٢٥ دينار

النقص أو الاستهلاك في السنة الثالثة = ٩٠٢٥ × $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٤٥١,٢٥ دينار

سعر السيارة في نهاية السنة الثانية = ٩٠٢٥ – ٤٥١,٢٥ = ٨٥٧٣,٧٥ دينار

وهكذا فإن سعر السيارة بعد مرور ٣ أعوام يُصبح ٨٥٧٣,٧٥ دينار

والجدول التالي يبين الحل في المثال ويسمى هذا الجدول لوحة البيانات المالية لعملية شراء السيارة.

السنة	السعر في بداية السنة بالدينار الأردني	نسبة النقص أو نسبة الاستهلاك	قيمة النقص أو الاستهلاك	السعر في نهاية السنة بالدينار الأردني
الأولى	١٠٠٠٠	٥٪	٥٠٠	٩٥٠٠
الثانية	٩٥٠٠	٥٪	٤٧٥	٩٠٢٥
الثالثة	٩٠٢٥	٥٪	٤٥١,٢٥	٨٥٧٣,٧٥

(١٣ ـ ٧) أمثلة محلولة على الرياضيات المالية

⇦مثال ١: استثمر شخص ٢٠٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها ٥٪ سنوياً لمدة سنة ونصف، ما جملة هذا المبلغ في نهاية المدة؟

الحل: نحول السنة ونصف إلى سنوات هكذا ١ + $\frac{١}{٢}$ = ١$\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ سنة

أو السنة = ١٢ شهر

نصف السنة = ٦ شهور

سنة ونصف = ١٨ شهر = $\frac{١٨}{١٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ سنة

ف بسيطة = المبلغ × معدل الفائدة × المدة

$$= ٢٠٠٠ \times \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{٣}{٢} = ١٥٠ \text{ دينار}$$

الجملة = المبلغ + ١٥٠ = ٢١٥٠ دينار

⇦مثال ٢: ما الفائدة المركبة لمبلغ ٨٠٠٠ دينار استثمر في أحد البنوك بمعدل ٣٪ سنوياً ولمدة ١٥ سنة إذا كانت الفوائد تضاف كل سنة.

بما أن: جـ = م (١ + ع)^{ن} حيث جـ الجملة

م المبلغ

ع معدل الفائدة

ن المدة بالسنوات

فإن جـ = ٨٠٠٠ (١,٠٣)^{١٥}

ومن الآلة الحاسبة نجد أن (١,٠٣)^{١٥}= ١,٥٥٧٩٧

فإن جـ = ٨٠٠٠ × ١,٥٥٧٩٧ = ١٢٤٦٣,٧٦٠٠٠ = ١٢٤٦٣,٧٦ دينار

ف المركبة = جـ - م

= ١٢٤٦٣,٧٦ – ٨٠٠٠ = ٤٤٦٣,٧٦ دينار

⇦مثال٣: استثمر شخص ٥٠٠٠ دينار في أحد البنوك لمدة ٢٩٢ يوماً بفائدة بسيطة معدلها ٦٪ سنوياً، احسب كلاً من الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية والفرق بينهما.

$$\text{ف ص} = \text{م} \times \text{ع} \times \frac{\text{ي}}{٣٦٥} = ٥٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٢٩٢}{٣٦٥} = ٢٤٠ \text{ دينار}$$

$$\text{ف ت} = \text{م} \times \text{ع} \times \frac{\text{ي}}{٣٦٠} = ٥٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٢٩٢}{٣٦٠} = ٢٤٣,٣ \text{ دينار}$$

الفرق بينهما = ف ت – ف ص = ٢٤٣,٣ – ٢٤٠= ٣,٣ دينار

ولصالح الفائدة التجارية حيث دائماً تكون هي الأكبر.

مثال٤: أودع شخص ٥٠٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها ١٠٪ سنوياً لمدة ٥ سنوات أوجد فوائده المركبة إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل كل ٦ شهور.

الحل: في السنة تضاف الفوائد إلى الأصل وتبين لذا نضرب ٥ في ٢ = ١٠ فترات والمعدل بنصف فيصبح $\frac{١٠٪}{٢}$ = ٥٪ كما في القانون:

$$جـ = م\,(١ + \frac{ع}{ك})^{ن ك} \quad حيث\ ك = ٢$$

$$= ٥٠٠٠\,(١ + \frac{٠,١٠}{٢})^{٥ \times ٢} = ٥٠٠٠\,(١,٠٥)^{١٠}$$

ومن الآلة الحاسبة نجد أن $(١,٠٥)^{١٠}$ = ١,٦٢٨٨٩٥

∴ جـ = ٥٠٠٠ $(١,٠٥)^{١٠}$ = ٥٠٠٠ (١,٦٢٨٨٩٥)

= ٨١٤٤,٤٧٥ دينار

ف المركبة = جـ - م

= ٨١٤٤,٤٧٥ ـ ٥٠٠٠

= ٣١٤٤,٤٧٥ دينار

مثال٥: أيهما أفضل أن تودع مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها ٤٪ ولمدة ٤ سنوات أم أن تودعه بفائدة مركبة معدلها ٢٪ سنوياً ولمدة ٣ سنوات؟

نحسب كلا من الفائدتين هكذا:

ف بسيطة = م × ع × ن

$$= ٥٠٠٠ \times \frac{٤}{١٠٠} \times ٤ = ٨٠٠\ دينار$$

لحساب الفائدة المركبة نحسب الجملة أولاً هكذا:

بما أن: جـ = م (١ + ع)^{ن} = ٥٠٠٠ (١,٠٣)^{٣}

= ٥٠٠٠ (١,٠٩٢٧٢٧)

= ٥٤٦٣,٦٣٥ دينار

ف المركبة = جـ - م = ٥٤٦٣,٦٣٥ - ٥٠٠٠

= ٤٦٣,٦٣٥ دينار

∴ إيداعه بالفائدة البسيطة أفضل حسب مُعطيات السؤال.

⇦مثال٦: تملك سيدة ٤٠٠ سهماً في إحدا الشركات الصناعية، القيمة الاسمية للسهم الواحد ٨ دنانير فإذا وزعت الشركة في إحدى السنوات أرباحاً نسبتها ٢٣٪، ما قيمة الأرباح التي تستلمها السيدة وإذا علمت أن السيدة قد اشترت السهم الواحد (ناقص) من السوق المالي بمبلغ ١٥ دينار، جد النسبة الفعلية لأرباحها؟

الأرباح = القيمة الاسمية للسهم × عدد الأسهم × نسبة الأرباح التي توزعها الشركة.

$$= ٨ \times ٤ \times \frac{٢٣}{١٠٠} = (٣٢)\ (٢٣) = ٧٣٦ \text{ دنانير}$$

$$\text{نسبة الأرباح الفعلية} = \frac{\text{القيمة الاسمية للسهم} \times \text{نسبة الربح}}{\text{سعر السهم في السوق}} \times ١٠٠٪$$

$$= \frac{٨ \times ٢٣}{١٥} \times ١٠٠٪$$

$$= \frac{١٨٤}{١٥} \times ١٠٠٪ = \frac{١٨٤٠٠}{١٥}٪ = ١٢,٢٧٪$$

⇦مثال٧: ما القيمة الحالية لكمبيالة قيمتها الاسمية ١٢٠ دينار تستحق الدفع بعد ٦ شهور بمعدل خصم ٦٪ ؟

خصم الكمبيالة = القيمة الاسمية × معدل الخصم × المدة

$$= ١٢٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢} = ٣.٦ \text{ دينار}$$

القيمة الحالية = القيمة الاسمية – الخصم = ١٢٠ – ٣,٦ = ١١٦,٤ دينار.

⇦مثال٨: أمّن رجل على حياته بمبلغ ٦٠٠٠ دينار وكان يدفع سنوياً لشركة التأمين ٧٪ من قيمة التأمين، فإذا توفي الرجل بعد ١٣ سنة، كم ديناراً خسرت أو ربحت الشركة؟

الحل:

ما دفعه الرجل = ما قبضته شركة التأمين = قسط التأمين السنوي × المدة

$$= \left(\frac{٧}{١٠٠} \times ٦٠٠٠ \right) \times ١٣$$

= (٤٢٠) (١٣) = ٥٤٦٠ دينار

ما دفعته الشركة لورثة الرجل = مبلغ التأمين = ٦٠٠٠ دينار

∴ خسارة شركة التأمين = ٦٠٠٠ – ٥٤٦٠ = ٦٤٠ دينار

⇦مثال٩: يوضح الجدول التالي بيانات عن ثلاثة مشاريع مستقلة:

المشروع	الربح الصافي	مجموع الأصول
أ	٤٠ ٠٠٠	٨٠ ٠٠٠
ب	٢٠ ٠٠٠	٨٠ ٠٠٠
جـ	٣٥ ٠٠٠	٨٠ ٠٠٠

اعتماداً على ذلك أوجد:

(١) نسبة العائد على الاستثمار لكل مشروع من المشاريع أ، ب، جـ.

(٢) أي المشاريع (أ، ب، جـ) هي الأفضل؟

بما أن نسبة العائد على الاستثمار = $\frac{\text{صافي الربح}}{\text{متوسط قيمة الأصول}} \times ١٠٠٪$

نسبة العائد على الاستثمار من مشروع (أ) = $\frac{٤٠\,٠٠٠}{٨٠\,٠٠٠} \times ١٠٠٪$

= ٥٠٪

نسبة العاد على الاستثمار من مشروع (ب) = $\frac{٢٠٠٠٠}{٨٠٠٠٠}$ × ١٠٠٪

= ٢٥٪

نسبة العاد على الاستثمار من مشروع (جـ) = $\frac{٣٥٠٠٠}{٨٠٠٠٠}$ × ١٠٠٪

= ٤٣٪

فالمشروع أ هو الأفضل لأن نسبة العائد من الاستثمار لهذا المشروع أعلى من نسبة العائد من الاستثمار لكل من المشروعين ب، جـ.

⇦مثال ١٠: طرحت إحدى الشركات المساهمة ٦٠٠٠ سند بربح معدله ٧٪ قيمة السند الاسمية ٢٨ دينار ومدة استهلاكه ١٠ سنوات، احسب:

(١) مقدار الربح السنوي الذي يحصل عليه شخص اشترى ٥٠ سنداً بالقيمة الاسمية.

(٢) إجمالي الربح الذي يحصل عليه الرجل نفسه طوال فترة استهلاك سنداته.

الربح السنوي للسندات = القيمة الاسمية للسند × معدل الربح × عدد السندات

= ٢٨ × $\frac{٧}{١٠٠}$ × ٥٠ = ٩٨ دينار

الربح الإجمالي = الربح السنوي × مدة الاستهلاك = ٩٨ × ١٠ = ٩٨٠ دينار

⇦مثال ١١: أمنت شركة تأمين لأحد التجار على كمية من السكر تقدر قيمتها بمبلغ ٣٦٠٠٠ دينار وكمية من الأرز بمبلغ ٣٢٠٠٠ دينار وكان رسم التأمين ٩٪ فإذا تلف من البضاعة أثناء النقل ما قيمته ١٥٠٠ دينار، فهل ربحت شركة التأمين أم خسرت وما مقدار ذلك ؟

ما قبضته الشركة من التاجر عن السكر = $\frac{٩}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠٠ = ٣٢٤٠ دينار

ما قبضته الشركة من التاجر عن الأرز = $\frac{٩}{١٠٠}$ × ٣٢٠٠٠ = ٢٨٨٠ دينار

ما قبضته شركة التأمين = ٣٢٤٠ + ٢٨٨٠ = ٦١٢٠ دينار

ما دفعته = ١٥٠٠ دينار

∴ ربحت شركة التأمين مقدار = ٦١٢٠ - ١٥٠٠ = ٤٦٢٠ دينار

مثال١٢: ما القيمة الاسمية لكمبيالة قيمتها الحالية ١٤٤ دينار تستحق الدفع بعد ٦ شهور فإذا خصمت بسعر ٨٪ ؟

نفرض القيمة الاسمية = س دينار

الخصم س × $\frac{٨}{١٠٠}$ × $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{٤س}{١٠٠}$ دينار

القيمة الحالية = القيمة الاسمية - الخصم

١٤٤ = س - $\frac{٤س}{١٠٠}$ = $\frac{٩٦س}{١٠٠}$

وبالضرب التبادلي: ٩٦س = ١٤٤ × ١٠٠

∴ س = $\frac{١٤٤ × ١٠٠}{٩٦}$ = ١٥٠ دينار

∴ القيمة الاسمية للكمبيالة = ١٥٠ دينار.

مثال١٣: يتقاضى سمسار أراضي وعقارات ٥٪ من البائع و٤٪ من المشتري فإذا بيعت شقة بمبلغ ٥٠٠٠٠ دينار بواسطته. كم ديناراً يتقاضى السمسار من كليهما ؟

ما يتقاضاه السمسار من البائع = $\frac{٥}{١٠٠}$ × ٥٠٠٠٠ = ٢٥٠٠ دينار

وما يتقاضاه السمسار من المشتري = $\frac{٤}{١٠٠}$ × ٥٠٠٠٠ = ٢٠٠٠ دينار

∴ ما يتقاضاه السمسار = ٢٥٠٠ + ٢٠٠٠ = ٤٥٠٠ دينار

ملحوظة:

ما يقبضه البائع = ٥٠٠٠٠ - ٢٥٠٠ = ٤٧٥٠٠ دينار

وما يدفعه المشتري = ٥٠٠٠٠ + ٢٠٠٠ = ٥٢٠٠٠ دينار

وكأن ما يتقاضاه السمسار = ٥٢٠٠٠ - ٤٧٥٠٠ = ٤٥٠٠ دينار

⇦مثال١٤: إذا كانت تكلفة شقة ١٥٠٠٠ دينار ونسبة المصروفات ٢٠٪ من سعر التكلفة ونسبة الربح المطلوب ٢٥٪ من سعر التكلفة احسب.

(١) سعر بيع الشقة (٢) نسبة هامش الربح إلى سعر البيع

الحل:

هامش الربح = الربح + المصروفات

= ($\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ١٥٠٠٠) + ($\frac{٢٥}{١٠٠}$ × ١٥٠٠٠)

= (٢٠) (١٥٠) + (٢٥) (١٥٠)

= (١٥٠) (٢٠ + ٢٥) = (١٥٠) (٤٥) = ٦٧٥٠ دينار

سعر بيع الشقة = التكلفة + هامش الربح

= ١٥٠٠٠ + ٦٧٥٠ = ٢١٧٥٠ دينار

نسبة هامش الربح إلى سعر البيع = $\frac{\text{هامش الربح}}{\text{سعر البيع}}$ × ١٠٠٪

$$= \frac{٦٧٥٠}{٢١٧٥} \times ١٠٠٪$$

$$= ٣١٪$$

وهذا يعني أن كل دينار من المبيعات يؤدي إلى تغطية ٣١ قرشاً من كلا ثمن التشغيل والربح معاً.

⇦مثال١٥: جهاز حاسوب سعره ١٠٠٠ دولار أمريكي، عرضت شركة فرنسية جهازاً مطابقاً له بالمواصفات بسعر ٩٠٠ يورو، فإذا علمت أن:

سعر شراء بيع الدولار (٠,٧٠٩ - ٠,٧١٠) دينار أردني

سعر شراء بيع اليورو (٠,٩٣٥ – ٠,٩٤٠) دينار أردني.

أي العرضين أفضل؟

الأفضل للمستهلك هو الأقل هنا بعد تحويل الأسعار إلى الدينار الأردني.

في الحالتين عند تحويل الدولار الأمريكي واليورو إلى دنانير أردنية كأننا نريد شراء هذه العملات ـ فالبنك أو الصراف يحسبها بسعر البيع:

الدولار الأمريكي		الدينار أردني
١	⟵	٠,٧١٠
١٠٠٠	⟵	س

بالضرب التبادلي: س = ١٠٠٠ × ٠,٧١٠= ٧١٠ دينار أردني

اليورو		الدينار أردني
١	⟵	٠,٩٤٠
٩٠٠	⟵	س

بالضرب التبادلي: س = ٩٠٠ × ٠,٩٤٠= ٨٤٦ دينار أردني

فالعرض الأول أقل وهو الأفضل.

⇦مثال ١٧ : اشترى خلدون جهاز حاسوب بمبلغ ٥٠٠ دينار فإذا أصبح سعره في موسم التنزيلات ٤٠٠ دينار جد نسبة التغير في السعر.

التغير = ٤٠٠ - ٥٠٠ = - ١٠٠ دينار

وبما أنه سالب فإنه يشير إلى انكماش اقتصادي

$$\text{نسبة التغيير} = \frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة السابقة}} \times 100\%$$

$$= \frac{100}{500} \times 100\% = -20\%$$ تناقصاً.

⇦مثال ١٨ : «هذا المثال يبين كيفية حساب قسط السيارة المباعة بالأقساط»

اشترى شخص سيارة بمبلغ ١٥٠٠٠ دينار، دفع من ثمنها نقداً ٥٠٠٠ دينار كدفعة أولى والباقي بالتقسيط لمدة ٤ سنوات فإذا علمت أن نسبة فائدة قروض السيارات في السوق في ذلك الحين ٧٪ جد مقدار القسط الشهري الذي يدفعه الشخص.

المبلغ الباقي = ١٥٠٠٠ – ٥٠٠٠ = ١٠٠٠٠ دينار

$$\text{فائدة القرض} = 10000 \times \frac{7}{100} \times 4 = 2800 \text{ دينار}$$

المبلغ الإجمالي = ١٠٠٠٠ + ٢٨٠٠ = ١٢٨٠٠ دينار والذي سيسدده على ٤ سنوات وشهرياً.

$$\text{القسط الشهري} = \frac{\text{المبلغ الإجمالي}}{\text{المدة بالشهور}} = \frac{12800}{4 \times 12} = \frac{1600}{6}$$

$$= \frac{800}{3}$$

= ٢٦٦.٦٦ ديناراً شهرياً.

مثال ١٩: تملك سائد ٢٥ سهماً من أسهم مقصف المدرسة، القيمة الاسمية للسهم الواحد ٢٥٠ فلس، كم ديناراً تبلغ أرباح سائد في نهاية العام إذا وزعت إدارة المقصف أرباحاً بنسبة ٢٨٪ ؟

أرباح سائد = القيمة الاسمية للسهم × عدد الأسهم × نسبة الأرباح

$$= ٢٥٠ \times ٢٥ \times \frac{٢٨}{١٠٠}$$

= (٢٥٠) × (٧) فلساً

$$\text{والأرباح بالدينار} = \frac{٢٥٠ \times ٧}{١٠٠٠}$$

$= \frac{٧}{٤} =$ ١.٧٥ دينار فقط.

مثال ٢٠: اشترى عاصم تلفزيوناً ملوناً بمبلغ ١٠٠٠ دينار، إذا علمت أن ثمن التلفزيون يتناقص بنسبة ١٪ كل شهر نتيجة الاستعمال.

احسب ثمنه بعد ٥ شهور من استعماله.

الشهر	الثمن في بداية الشهر	نسبة الاستهلاك	قيمة النصف بالدينار	الثمن في نهاية الشهر
الأول	١٠٠٠	١٪	١٠ دينار	(١٠٠٠ ـ ١٠) ٩٩٠ وهكذا
الثاني	٩٩٠	١٪	٩,٩ دينار	٩٨٠.١
الثالث	٩٨٠,١	١٪	٩,٨٠١ دينار	٩٧٠,٢٩٩
الرابع	٩٧٠,٢٩٩	١٪	٩,٧٠٢ دينار	٩٦٠,٢٩٩
الخامس	٩٦٠,٥٩٧	١٪	٩,٦٠٥ دينار	٩٥٠,٩٩٢

وهكذا ومن بيانات الجدول تصبح فيه التلفزيون بعد ٥ شهور من استعماله ٩٥١ دينار تقريباً.

(١٣ ـ ٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) أودع شخص ٨٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة معدلها ٦٪ سنوياً ولمدة ٥ سنوات احسب فوائده المركبة

{٢٧٠,٥٨ دينار}

(٢) أودعت سلمى مبلغ ٦٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٨٪ أوجد فوائدها في نهاية ٩ شهور من تاريخ الإيداع

{٣٦٠ دينار}

(٣) اقترض زيدون من بنك مبلغ ١٠ ٠٠٠ دينار بفائدة مركبة معدلها السنوي ٩٪ وأراد لتسديد جملة هذا القرض على أقساط متساوية ومتتالية وكل أربعة شهور ولمدة ٤ سنوات.

احسب عدد الأقساط المستحقة عليه وقيمة كل قسط منها

{١٢، ١١٨٨,١٣}

(٤) اشترى حسّان ١٥٠٠ سند بسعر ٢,١ دينار للواحد فإذا علمت أن القيمة الاسمية للسند ٢ دينار وأن معدل الفائدة السنوي عليها ٦٪ والربح الإجمالي لحسّان إذا كانت مدة استهلاك السندات ٦ سنوات.

{١٠٨٠ دينار}

(٥) أودع سلمان مبلغ ١٠٠ ٠٠٠ دينار في البنك العربي بفائدة مركبة معدلها السنوي ٨٪ ولمدة ٤ سنوات.

احسب جملة ماله في البنك في نهاية المدة

{١٣٦٠٤٩ دينار}

(٦) تسلّم يزن من والده ١٠٠٠ دينار عندما نجح في امتحان شهادة الدراسة الثانوية فأودعها آنذاك في البنك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٥٪ . احسب فوائده بعد ٢٠ سنة إذا كانت الفوائد تضاف كل عام.

إرشاد: اعتبر $(١,٠٥)^{٢٠}$ = ٢,٦٥٣٢٩٨ {١٦٥٣.٢٩٨ دينار}

(٧) أودعت موظفة مبلغ ٢٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٨٪ ولمدة ٤ سنوات احسب فوائدها.

{٨٤٠}

(٨) اقترض همّام مبلغ ٤٥٠٠ دينار من البنك العربي بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٩٪ ولمدة ٨ شهور.

كم يسدد للبنك ولمدة ٨ شهور ؟

{٤٧٧٠}

إرشاد: الجملة = الأصل + الفوائد

(٩) ما النسبة بين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لمبلغ ٧٣٠ دينار استثمر لمدة ١٤٠ يوماً بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٤٪

{١١٣ : ١٢٢}

(١٠) أراد شخص أن يحوّل لولده الذي يدرس في سويسرا مبلغ ٤٠٠٠ فرنك سويسري فكم ديناراً أردنياً يدفع مقابل ذلك للبنك علماً بأن سعر الفرنك السويسري ١٥٨,٩ فلس أردني، ١٦٠,٢ فلس أردني بيع.

{٦٤٠,٨}

(١١) خصم شخص كمبيالة في أحد البنوك بعمان قيمتها الاسمية ١٠٠ دينار بمعدل خصم ٩٪ سنوياً فإذا كانت مدة الخصم ١١٠ أيام.
احسب قيمة الكمبيالة الحالية

{٩٧.٢٥}

(١٢) اشترى صاحب مصنع آلة لمصنعه عام ٢٠٠٥م بمبلغ ٥٠٠٠ دينار، فإذا أصبح سعرها عام ٢٠٠٧م ٤٨٠٠ دينار، جد نسبة التغير في سعر الآلة عام ٢٠٠٧م مقارنة بعام ٢٠٠٥م.

{٤٠٪}

(١٣) قبل عودة أحد العمال المصريين العاملين في الأردن إلى بلده مصر حوَّل مبلغ ٢٤٣٦ دينار أردني إلى جنيهات مصرية، فإذا كان سعر شراء بيع الجنيه المصري هو ٠.١٢٠٠ ـ ٠.١٢١٨ دينار أردني.
كم جنيهاً مصرياً قبض هذا العامل ؟

{٢٠ ٠٠٠ جنيه مصري}

(١٤) مقاول بناء تكلفه الشقة الواحدة ٢٦٠٠٠ دينار فإذا كانت نسبة المصروفات ٢٠٪ من التكلفة وأراد أن يكسب ٣٠٪ من ثمن التكلفة، بكم دينار يبيع الشقة وما نسبة هامش ربحه إلى سعر البيع

{٣٩٠٠٠، ٥٠٪}

(١٥) تملكت سلوى ٤٠٠ سهماً في إحدى الشركات الصناعية فإذا كانت القيمة الاسمية للسهم ٥ دنانير ووزعت الشركة في إحدى السنوات أرباحاً بنسبة ٢٤٪، احسب أرباح سلمى في تلك السنة، وإذا كان سعر السهم الواحد في

السوق المالي ١٨ دينار فما النسبة الفعلية لأرباحها ؟

{٤٨٠، ٦,٦٪}

(١٦) اقترض مديان مبلغ ٣٠٠٠ دينار من أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها ٤٪ سنوياً ولمدة ١٤٦ يوماً لإتمام بناء بيته، احسب كم دينار يدفع مديان للبنك للقرض باعتبار السنة ٣٦٥ يوماً.

{٣٠٤٨ دينار}

(١٧) ما جملة مبلغ ٥٠٠٠ دينار أودع في بنك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٥٪ ولمدة ٤ سنوات ؟

{٦٠٧٥ دينار}

(١٨) ما الفائدة المركبة المستحقة على مبلغ ٥٠٠ دينار في نهاية ٦ سنوات و ٩ شهور بمعدل فائدة اسمي ٤ سنوات إذا كانت الفوائد تضاف على الأصل كل رُبع سنة.

{١٥٤.١٠٤}

(١٩) دفع سعدون مبلغ ٥٧٠ ديناراً ثمناً لثلاجة اشتراها من أحد المعارض التجارية والتي قد كتب عليها ٦٢٥ دينار، فما النسبة المئوية للخصم الذي خصمه البائع لسعدون ؟

{٨.٨٪}

إرشاد: الخصم يُنسب إلى السعر المكتوب دائماً

(٢٠) أيهما أفضل لسلمى أن تودع ٢٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها السنوي

٩٪ ولمدة ٥ سنوات أم ان تودع نفس المبلغ في بنك آخر بفائدة مركبة معدلها السنوي ٥٪ ولمدة ٩ سنوات ؟

(٢١) أودعت جيزين مبلغ ١٠٠ دينار في أحد البنوك بفائدة بسيطة فبلغت فوائدها في نهاية العام ٨ دنانير، وبعدها تشجعت شقيقتها شيرين فأودعت ١٠٠ دينار لمدة ٣ سنين في نفس البنك، كم تبلغ فوائدها البسيطة في نهاية المدة

{٢٤ دينار}

(٢٢) إذا كان محل تجاري يخصم ١٦٪ من السعر المكتوب على جهاز التلفزيون لزبائنه، وإذا علمت أن حسّان قد اشترى جهازاً ودفع الخصم ٤٢٠ دينار ثمناً له، فما قيمة السعر المكتوب عليه يا تُرى ؟

{٥٠٠ دينار}

(٢٣) أمَّن شخص على حياته لدى إحدى شركات التأمين بمبلغ ٦٠٠٠ دينار وكان يدفع سنوياً ٥٪ من المبلغ، فإذا توفي الرجل بعد ١٧ عام، فهل خسرت أم ربحت شركة التأمين ؟ وكم كان ذلك.

(٢٤) اقترض قيس ٤٠٠٠ دينار من أحد البنوك بفائدة بسيطة معدلها ٩٪ سنوياً، ما قيمة المبلغ الذي يسدده للبنك بعد مرور سنة وثلاثة أشهر من تستلامه للقرض.

{٤٤٥٠}

(٢٥) أودع الأخ الأكبر ٥٠٠ دينار بفائدة بسيطة في أحد البنوك، معدلها ٨٪ لمدة ٧٢ يوماً فتشجع الأخ الأصغر وأودع أيضاً ٥٠٠ دينار وبنفس الشروط ولكن ٧٣ يوماً.

أيهما أكبر الفوائد التجارية التي حصل عليها الأخ الأكبر، أم الفوائد

الصحيحة التي حصل عليها الأخ الأصغر ؟

{متسا وية بالقيمة}

(٢٦) ما جملة ١٠٠٠ دينار استثمر في بنك بفائدة مركبة معدلها ٦٪ سنوياً لمدة خمس سنوات إذا كانت الفوائد تضاف كل سنة.

(٢٧) أودع شخص مبلغ ٢٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة معدلها السنوي ٣٪ ولمدة سنة على أن تضاف الفوائد كل ستة أشهر (نصف سنة).

أوجد جملة مبلغه في نهاية المدة وكذلك فوائده المركبة

{٢١٢٢٧.٢ ، ١٢٢٧.٢ دينار}

(٢٨) أودع عثمان مبلغ ١٠٠٠ دينار في بنك بفائدة بسيطة معدلها السنوي ٦٪ ولمدة ٣ سنوات وأودع سلمان مبلغ مماثل في بنك آخر بفائدة مركبة وبنفس المعدل ولنفس المدة أيضاً.

ما الفرق بين جملة مبلغ عثمان وجملة مبلغ سلمان بالدينار؟

(٢٩) أودعت السيدة نجوى باسم مولودتها الجديدة سلوى مئة دينار في أحد البنوك بفائدة مركبة معدلها السنوي $\frac{1}{2}$٢٪، كم تتسلم سلوى من البنك عندما تبلغ سن الأربعين علماً بأن الفوائد تضاف إلى الأصل باستمرار؟

{٢٧٠٠ دينار}

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.